۱ گزینه ۳

هر سه عدد می‌توانند همواره مثبت باشند. همچنین ممکن است دو عدد همواره منفی و عدد سوم مثبت باشد، پس چهار حالت داریم:

$$\begin{cases} a > ۰\ ,\ b < ۰\ ,\ c < ۰ \\ a > ۰\ ,\ b > ۰\ ,\ c > ۰ \\ a < ۰\ ,\ b > ۰\ ,\ c < ۰ \\ a < ۰\ ,\ b < ۰\ ,\ c > ۰ \end{cases}$$

۲ گزینه ۳

$$x = \frac{۱}{x} + \sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow x - \frac{۱}{x} = \sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - \frac{۱}{\sqrt{x}})(\sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}}) = \sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x>۰} \sqrt{x} - \frac{۱}{\sqrt{x}} = ۱$$

$$\xrightarrow[\text{۲ می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان}} x + \frac{۱}{x} - ۲ = ۱ \Rightarrow x + \frac{۱}{x} = ۳$$

۳ گزینه ۲

$$\frac{a^{m+۱}\times a^{m+۲}\times \ldots \times a^{۲m}}{a^{n+۱}\times a^{n+۲}\times \ldots \times a^{۲n}} = a^{\frac{x}{۲}} = \frac{a^{(m+۱)+(m+۲)+\ldots+۲m}}{a^{(n+۱)+(n+۲)+\ldots+۲n}}$$

توجه داشته باشید که:

$$(m+۱)+(m+۲)+\ldots+(m+m) = \underbrace{(m+m+\ldots+m)}_{\text{m تا}} + (۱+۲+۳+\ldots+m)$$

$$= m\times m + \frac{m(m+۱)}{۲} = m^{۲} + \frac{m^{۲}+m}{۲} = \frac{۳m^{۲}+m}{۲}$$

همین‌طور خواهیم داشت:

$$(n+۱)+(n+۲)+\ldots+۲n = \underbrace{(n+n+n+n+\ldots+n)}_{\text{n تا}} + (۱+۲+\ldots+n) = n\times n + \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$= n^{۲} + \frac{n^{۲}+n}{۲} = \frac{۳n^{۲}+n}{۲} \Rightarrow a^{\frac{۳m^{۲}+m}{۲}-\frac{۳n^{۲}+n}{۲}} = a^{\frac{۳(m^{۲}-n^{۲})+(m-n)}{۲}} = a^{\frac{x}{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۳(m^{۲}-n^{۲})+(m-n)}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۳} = (m^{۲}-n^{۲}) + \frac{۱}{۳}(m-n) = (m-n)(m+n) + \frac{۱}{۳}(m-n) = (m-n)(m+n+\frac{۱}{۳})$$

۴ گزینه ۴

یک‌جمله‌ای باید حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد. در گزینهٔ "۴" داریم:

$$(\frac{۱}{۲}x^{۲})^{۲} = \frac{۱}{۴}x^{۴}$$

باتوجه‌به تعریف، این گزینه یک‌جمله‌ای است ولی بقیهٔ گزینه‌ها یک‌جمله‌ای نیستند.

۵ گزینه ۴

مساحت هر گزینه:

$$\text{گزینهٔ ۱}: \frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۲}yx^{۲}+yx^{۲})\times\frac{ay}{x} = \frac{۵}{۴}ay^{۲}x$$

$$\text{گزینهٔ ۲}: \frac{۱}{۲}(ax+bx)\times c = \frac{c(a+b)}{۲}x$$

$$\text{گزینهٔ ۳}: \frac{۱}{۲}\times\frac{x}{y}\times\frac{y}{x} = \frac{۱}{۲}$$

گزینهٔ "۴": این عبارت توان منفی دارد پس یک‌جمله‌ای نیست.

$$xy\times\frac{a}{x^{۲}} = \frac{ay}{x} = ayx^{-۱}$$

۶ گزینه ۴

باتوجه‌به زوایای قائمهٔ شکل، خطوط موازی بین دو خط موازی باهم برابرند؛ بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} DC = x - z \\ AD = \frac{y}{۲} + z \\ AD = BC \\ DC = AB \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مستطیل } ABCD = AD + BC + BA + CD$$
$$= ۲ \times (x - z) + ۲ \times (\frac{y}{۲} + z) = ۲x + y$$

۷ گزینه ۴

$$۳x - ۶ \leq x - ۳ \Rightarrow ۲x \leq ۳ \Rightarrow x \leq \frac{۳}{۲}$$

$$x - ۳ \leq -۳x - ۴ \Rightarrow ۴x \leq -۱ \Rightarrow x \leq -\frac{۱}{۴}$$

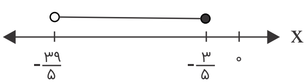
پس باید $x \leq -\frac{۱}{۴}$ باشد.

۸ گزینه ۱

طرفین نامعادله‌ها را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم و آن‌ها را جداگانه حل می‌کنیم، پس داریم:

$$\begin{cases} ۴(x+۱) \leq ۱ - x \\ ۱ - x < ۴(x + ۱۰) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴x + ۴ \leq ۱ - x \\ ۱ - x < ۴x + ۴۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵x \leq -۳ \Rightarrow x \leq \frac{-۳}{۵} \\ -۵x < ۳۹ \Rightarrow x > -\frac{۳۹}{۵} \end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب نامعادله به‌صورت $\{x \in \mathbb{R} | -\frac{۳۹}{۵} < x \leq \frac{-۳}{۵}\}$ خواهد بود.



۹ گزینه ۱

$$x^۵ - x^۴y + x - y < ۰ \Rightarrow x^۴(x - y) + (x - y) < ۰ \Rightarrow (x - y)(x^۴ + ۱) < ۰$$

باتوجه‌به اینکه $x^۴ + ۱$ همواره بزرگ‌تر از صفر است، خواهیم داشت:

$$x - y < ۰ \Rightarrow x < y$$

پس گزینهٔ "۱" صحیح است.

۱۰ گزینهٔ ۲

ضرایب متغیرهای همدرجه را پس از ساده کردن عبارت با یکدیگر مساوی قرار می‌دهیم. چون در طرف چپ x نداریم، پس ضریب x را صفر قرار می‌دهیم.

$$۵ + c = ۷ \Rightarrow c = ۲$$
$$۲a - ۶ = ۰ \Rightarrow a = ۳$$
$$a + ۲b = -۵ \Rightarrow ۳ + ۲b = -۵ \Rightarrow ۲b = -۸ \Rightarrow b = -۴$$

$$\Rightarrow a + b + c = ۳ - ۴ + ۲ = ۱$$

۱۱ گزینهٔ ۲

اگر $N = ۸$ باشد، در تجزیهٔ عدد حاصل، توان همهٔ شمارنده‌ها عددی زوج می‌شود، پس عدد مربع کامل می‌شود.

$$۳ \times ۸ \times ۱۵ \times ۲۴ \times ۳۵ \times ۴۸ \times ۶۳ = ۲^{۱۰} \times ۳^{۶} \times ۵^{۲} \times ۷^{۲}$$

۱۲ گزینهٔ ۱

گزینهٔ "۱" با نمودار متناسب است، چون تنها گزینه‌ای است که همهٔ اعداد بزرگ‌تر مساوی عدد چهار را نشان می‌دهد.

$$\text{گزینهٔ ۱} : ۲x + ۷ \geq ۱۵ \Rightarrow ۲x \geq ۸ \Rightarrow x \geq ۴$$

۱۳ گزینهٔ ۱

$$۵x - ۲x + \frac{۳x - ۲}{۵} - m \geq ۰ \Rightarrow ۳x + \frac{۳x - ۲}{۵} - m \geq ۰ \xrightarrow{\times ۵} ۱۵x + ۳x - ۲ - ۵m \geq ۰$$
$$۱۸x - ۲ - ۵m \geq ۰ \Rightarrow ۱۸x \geq ۲ + ۵m \xrightarrow{\div ۱۸} x \geq \frac{۲ + ۵m}{۱۸}$$

ازطرفی باتوجه‌به مجموعه جواب این نامعادله روی محور اعداد حقیقی داریم: $x \geq ۴$

$$\Rightarrow \frac{۲ + ۵m}{۱۸} = ۴ \Rightarrow ۲ + ۵m = ۷۲ \Rightarrow ۵m = ۷۰ \Rightarrow m = ۱۴$$

۱۴ گزینهٔ ۲

به توان عدد فرد رساندن دو طرف نامعادله، علامت نامساوی را تغییر نمی‌دهد، اما از گزینه‌های دیگر نمی‌توان مطمئن بود.

۱۵ گزینهٔ ۳

$$(a + b)^{۳} = (a + b)^{۲}(a + b) = (a^{۲} + b^{۲} + ۲ab)(a + b) = a^{۳} + a^{۲}b + ab^{۲} + b^{۳} + ۲a^{۲}b + ۲ab^{۲}$$
$$= a^{۳} + b^{۳} + ۳a^{۲}b + ۳b^{۲}a = a^{۳} + b^{۳} + ۳ab(a + b) \xrightarrow[a^{۳}+b^{۳}=۲۵]{(a+b)^{۳}=۴^{۳}=۶۴} ۶۴ = ۲۵ + ۳ab(۴)$$
$$\Rightarrow ۳۹ = ۱۲ab \Rightarrow ab = \frac{۳۹}{۱۲} = \frac{۱۳}{۴}$$

۱۶ گزینه ۴

$$x^۲ - ۲x - ۳ = x^۲ + (-۳ + ۱)x + (-۳ \times ۱) = (x - ۳)(x + ۱)$$

۱۷ گزینه ۱

اتحاد مربع مجموع سه جمله را می‌نویسیم و مقادیر داده‌شده را جایگذاری می‌کنیم.

$$\underbrace{(a + b + c)^۲}_{۸} = \underbrace{a^۲ + b^۲ + c^۲}_{۳۰} + ۲ab + ۲ac + ۲bc$$

$$\Rightarrow ۸^۲ = ۳۰ + ۲(ab + ac + bc)$$

$$ab + ac + bc = \frac{۶۴ - ۳۰}{۲} = \frac{۳۴}{۲} = ۱۷$$

۱۸ گزینه ۲

$$x^۲ + y^۲ + x - y + xy + ۱ = ۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲x - ۲y + ۲xy + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ + y^۲ - ۲y + ۱ + y^۲ + ۲xy + x^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x + ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ + (y + x)^۲ = ۰$$

همان‌طور که می‌دانیم، مربع هر عدد همواره نامنفی است. در عبارت بالا چون مجموع سه عدد نامنفی برابر با صفر است، می‌توان نتیجه گرفت که هریک از آن‌ها برابر با صفر هستند؛ پس:

$$(x + ۱)^۲ = (y - ۱)^۲ = (y + x)^۲ = ۰$$

۱۹ گزینه ۳

$$t^۵ = t(t^۲)^۲ = t(t + ۱)^۲ = t(t^۲ + ۱ + ۲t) = t(t + ۱ + ۱ + ۲t) = t(۳t + ۲) = ۳t^۲ + ۲t$$

$$= ۳(t + ۱) + ۲t = ۳t + ۳ + ۲t = ۵t + ۳$$

۲۰ گزینه ۴

برای اینکه درجهٔ چندجمله‌ای نسبت به y و x برابر ۴ باشد باید عبارت $۵ + (a - ۱)$ برابر ۴ یا کمتر باشد؛ پس:

$$۵ + a - ۱ = ۴ \Rightarrow a = ۰$$

اما اگر $a = ۰$ باشد عبارت $x^۵y^{-۱}$ را خواهیم داشت که باعث می‌شود عبارت چندجمله‌ای نباشد، پس عملاً خواستهٔ صورت سؤال غیرممکن است.