۱ گزینه ۴

$$y = mx - ۲nx - m + ۳ = (m - ۲n)x + (-m + ۳)$$

خطوطی که از مبدأ مختصات عبور می‌کنند، معادله‌ای به شکل $y = ax$ دارند، پس داریم:

$$-m + ۳ = ۰ \Rightarrow m = ۳ \Rightarrow y = (۳ - ۲n)x$$

اگر $۳ - ۲n = ۰$ باشد، n برابر $\frac{۳}{۲}$ خواهد بود که در این حالت معادلهٔ فوق به $y = ۰$ تبدیل می‌شود که در این صورت نیز از مبدأ می‌گذرد.

۲ گزینه ۳

نقطه را به‌صورت $\begin{bmatrix} m \\ -\frac{۱}{m} \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم، پس داریم:

$$۴m + \frac{۱}{m} = ۵ \Rightarrow \frac{۴m^۲ + ۱}{m} = ۵ \Rightarrow ۴m^۲ + ۱ = ۵m$$

$$\Rightarrow ۴m^۲ - ۵m + ۱ = ۰ \Rightarrow (m - ۱)(۴m - ۱) = ۰ \Rightarrow m = ۱ \ , \ m = \frac{۱}{۴}$$

$$m = ۱ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \ , \ m = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} \\ -۴ \end{bmatrix}$$

۳ گزینه ۳

دو نقطه از خط مشخص است. با استفاده از مختصات آن‌ها معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow a = \frac{۰ - ۳}{۲ - ۰} = -\frac{۳}{۲}$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = -\frac{۳}{۲}x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}} ۰ = -\frac{۳}{۲} \times ۲ + b \Rightarrow b = ۳$$

معادلهٔ خط موردنظر:

$$y = -\frac{۳}{۲}x + ۳$$

۴ گزینه ۲

راه‌حل اول:

نقاط را در معادله امتحان می‌کنیم:

$$\text{گزینهٔ ۱}: \frac{۱}{۲} = -۶ \times ۲ + ۵ = -۷ \quad \times$$

$$\text{گزینهٔ ۲}: ۳ = -۶ \times \frac{۱}{۳} + ۵ = -۲ + ۵ = ۳ \quad \checkmark$$

$$\text{گزینهٔ ۳}: \frac{۱}{۳} = -۶ \times ۳ + ۵ = -۱۳ \quad \times$$

$$\text{گزینهٔ ۴}: ۶ = (-۶) \times \frac{۱}{۶} + ۵ = -۱ + ۵ = ۴ \quad \times$$

راه‌حل دوم:

معادله را می‌نویسیم:

$$y = -۶x + ۵ \ , \ x = \frac{۱}{y} \Rightarrow y = \frac{-۶}{y} + ۵ \Rightarrow y + \frac{۶}{y} - ۵ = ۰$$

$$\frac{y^۲ + ۶ - ۵y}{y} = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۵y + ۶ = ۰ \Rightarrow (y-۲)(y-۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = ۲ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ ۲ \end{bmatrix} \\ y = ۳ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ ۳ \end{bmatrix} \end{cases}$$

۵ گزینه ۳

نقطهٔ موردنظر مختصات $\begin{bmatrix} ۰ \\ b \end{bmatrix}$ دارد، بنابراین:

$$d_۱ : (a-۱) \times ۰ = ۲b - ۱ = ۰ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

پس مختصات نقطهٔ تلاقی $\begin{bmatrix} ۰ \\ \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ است. بنابراین:

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} : ۰ + ۳ = (a+۲) \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}(a+۲) = ۳ \Rightarrow a + ۲ = ۶ \Rightarrow a = ۴$$

۶ گزینه ۳

$$۱)\ y+۳x-۱=۰ \Rightarrow y=-۳x+۱ \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب}=-۳ \\ \text{عرض از مبدأ}=۱ \end{cases} \xrightarrow{(\times)} -۳$$

$$۲)\ \frac{y}{۲}-\frac{x}{۳}+۲=۰ \xrightarrow{\times ۲} y=\frac{۲}{۳}x-۴ \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب}=\frac{۲}{۳} \\ \text{عرض از مبدأ}=-۴ \end{cases} \xrightarrow{(\times)} -\frac{۸}{۳}$$

$$۳)\ y+۲x+۲=۰ \Rightarrow y=-۲x-۲ \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب}=-۲ \\ \text{عرض از مبدأ}=-۲ \end{cases} \xrightarrow{(\times)} ۴$$

$$۴)\ ۲y=۴x-۵ \Rightarrow y=۲x-\frac{۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب}=۲ \\ \text{عرض از مبدأ}=-\frac{۵}{۲} \end{cases} \xrightarrow{(\times)} -۵$$

۷ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$\begin{matrix}(-۳)\times \\ ۵\times \end{matrix} \begin{cases} ۵x+۳y-۷=۰ \\ ۳x+۵y-۷=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۱۵x-۹y+۲۱=۰ \\ ۱۵x+۲۵y-۳۵=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جمع طرفین}: ۱۶y-۱۴=۰ \Rightarrow y=\frac{۱۴}{۱۶}=\frac{۷}{۸}$$

$$۵x+۳\times\frac{۷}{۸}-۷=۰ \Rightarrow ۵x=۷-\frac{۲۱}{۸} \Rightarrow x=\frac{۵۶-۲۱}{۴۰}=\frac{۳۵}{۴۰}=\frac{۷}{۸}$$

خط از نقاط $\begin{bmatrix} \frac{۷}{۸} \\ \frac{۷}{۸} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ می‌گذرد، درنتیجه:

$$\text{شیب خط}=\frac{\frac{۷}{۸}-۰}{\frac{۷}{۸}-۰}=۱$$

راه‌حل دوم:

به شکل کلی محل تلاقی دو خط به معادله‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} ax+by=t \\ bx+ay=t \end{matrix}\right\} \Rightarrow ax+by=bx+ay \Rightarrow (a-b)x=(a-b)y \xrightarrow{a\boxplus b} x=y$$

یعنی محل برخورد هر دو خط به معادله‌های بالا، روی خط $y=x$ است. این خط از مبدأ نیز می‌گذرد؛ بنابراین صورت سوال شیب همین خط را خواسته است که برابر با ۱ است.

۸ گزینه ۴

برای به دست آوردن محل برخورد دو خط کافی است دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} -۳x + ۹y = ۱۲ \xrightarrow{\div(-۳)} x - ۳y = -۴ \Rightarrow x = ۳y - ۴ \\ ۲y = -x + ۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگزینی اولی در معادلهٔ دوم}} ۲y = -(۳y - ۴) + ۱ \Rightarrow ۵y = ۵ \Rightarrow y = ۱$$

$$\xrightarrow[y=۱]{x=۳y-۴} x = ۳ - ۴ = -۱ \Rightarrow \text{نقطهٔ برخورد} : \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۹ گزینه ۴

تنها حالتی که نمی‌توان با سه نقطهٔ تعریف‌شده یک مثلث ساخت آن است که سه نقطه روی یک خط راست قرار داشته باشند. وقتی سه نقطه روی یک خط قرار دارند، خط گذرنده از هر جفت آن‌ها شیب یکسانی دارد؛ بنابراین، اگر شیب خط AB را مساوی با شیب BC قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\text{شیب } AB = \frac{۱ + ۲a - (۰)}{۳ - ۰} = \frac{۱ + ۲a}{۳}$$

$$\text{شیب } BC = \frac{۱ + ۲a - a}{۳ - (-۱)} = \frac{۱ + a}{۳ + ۱} = \frac{۱ + a}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱ + ۲a}{۳} = \frac{۱ + a}{۴} \Rightarrow ۴ + ۸a = ۳ + ۳a \Rightarrow ۵a = -۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۵}$$

۱۰ گزینه ۱

$$y = ۴x - ۳ \Rightarrow (۲m - ۱) = ۴(m) - ۳ \Rightarrow -۲m = -۲ \Rightarrow m = ۱$$

۱۱ گزینه ۴

عبارت زیر، صورت کلی معادلهٔ خطوطی است که از مبدأ مختصات می‌گذرد:

$$\frac{۱}{a}y = bx \Rightarrow y = \underbrace{ab}_{k}x \Rightarrow y = kx$$

۱۲ گزینه ۲

$$۵(۲x - y) + ۳(۲x - y + ۱) - ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۱۰x - ۵y + ۶x - ۳y + ۳ - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۶x - ۸y - ۹ = ۰ \Rightarrow ۸y = ۱۶x - ۹ \Rightarrow y = ۲x - \frac{۹}{۸} \Rightarrow \text{شیب خط} = ۲$$

۱۳ گزینه ۲

$$x = ۲ \Rightarrow ۳ \times ۲ - ۲y = ۵$$

$$\Rightarrow -۲y = ۵ - ۶$$

$$\Rightarrow y = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow -۲y = -۱$$

شیب خطی که از نقطه‌ای به مختصات $\begin{bmatrix} ۲ \\ \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ و مبدأ مختصات $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ می‌گذرد، برابر است با:

$$\frac{\frac{۱}{۲} - ۰}{۲ - ۰} = \frac{۱}{۴}$$

۱۴ گزینه ۲

برای به دست آوردن نقطهٔ تلاقی خط $x + ۲(a+۲)y = ۱$ و محور xها، در معادلهٔ خط مقدار $y = ۰$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$x + ۲(a+۲)y = x + ۰ = ۱ \Rightarrow x = ۱$$

این نقطه، نقطهٔ تلاقی خط $(a+۲)x + ۲y = ۳$ با محور xها نیز هست: $(x = ۱ \ , \ y = ۰)$

$$(a+۲)x + ۲y = ۳ \xrightarrow[y=۰]{x=۱} a + ۲ = ۳ \Rightarrow a = ۱$$

۱۵ گزینه ۳

ابتدا محل برخورد دو خط را با حل دستگاه به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x + ۲y = ۱ \\ ۲x + y = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + ۲y = ۱ \\ -۴x - ۲y = ۲ \end{cases} \Rightarrow -۳x = ۳ \Rightarrow x = -۱$$

$$۲ \times (-۱) + y = -۱ \Rightarrow y = ۲ - ۱ = ۱$$

$$\text{معادلهٔ خط : } y = ax + b \xrightarrow{a=۲} y = ۲x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}} ۱ = -۲ + b \Rightarrow b = ۳$$

$$\Rightarrow y = ۲x + ۳ \xrightarrow{x=۰} y = ۳$$

درنتیجه عرض محل برخورد خط با محور yها برابر است با: $y = ۳$

۱۶ گزینه ۴

دو نقطهٔ از خط را داریم:

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix} -۱ \\ ۹ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{۹ - ۱}{-۱ - ۳} = \frac{۸}{-۴} = -۲$$

$$y = -۲x + b \Rightarrow ۱ = -۲ \times ۳ + b \Rightarrow b = ۷ \Rightarrow y = -۲x + ۷$$

۱۷ گزینه ۴

$$d_۱ : \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow y = ۰$$
$$d_۲ : \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱۰ \end{bmatrix} \Rightarrow x = ۰$$

دو خط یاد شده روی محورهای مختصات هستند. محل برخورد آن‌ها مبدأ مختصات است و حاصل‌جمع طول و عرض مختصات آن صفر می‌شود.

۱۸ گزینه ۳

خطوطی موازی هستند که شیب برابر داشته باشند. شیب خط‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{الف}) \ y = ۴x - ۲ \Rightarrow \text{شیب} = ۴$$
$$\text{ب}) \ y = ۷x + ۳ \Rightarrow \text{شیب} = ۷$$
$$\text{پ}) \ y = \sqrt{\frac{۴۸}{۳}}x + \pi = \sqrt{۱۶}x + \pi = ۴x + \pi \Rightarrow \text{شیب} = ۴$$
$$\text{ت}) \ -y = ۴x + ۱۷ \Rightarrow y = -۴x - ۱۷ \Rightarrow \text{شیب} = -۴$$

ازآنجایی‌که موارد الف و پ دارای شیب برابری هستند، با یکدیگر موازی‌اند.

۱۹ گزینه ۳

x را تعداد کتاب‌های علی و y را تعداد کتاب‌های رضا در نظر می‌گیریم:

$$\text{باتوجه‌به سؤال} : \begin{matrix} x = ۳y + ۶ \\ x - y = ۱۴ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x - ۳y = ۶ \\ x - y = ۱۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۳y = ۶ \\ -x + y = -۱۴ \end{cases} \Rightarrow -۲y = -۸ \Rightarrow y = ۴ \Rightarrow x = ۱۸ \Rightarrow x + y = ۲۲$$

دقت کنید که باتوجه‌به صورت سؤال تعداد کتاب‌های علی بیشتر است؛ پس $x - y = ۱۴$ صحیح است نه $y - x = ۱۴$.

۲۰ گزینه ۲

اگر خطی موازی با محور طول‌ها باشد، شیب آن برابر با صفر است؛ بنابراین:

$$۳my = (۳m - ۵)x + m$$
$$y = \frac{(۳m - ۵)}{۳m}x + \frac{m}{۳m} = \frac{۳m - ۵}{۳m}x + \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۳m - ۵}{۳m} = ۰ \Rightarrow m = \frac{۵}{۳}$$