۱ گزینه ۴

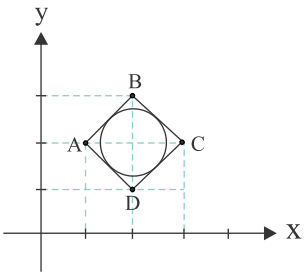
هر نقطه روی محور طول‌ها دارای عرض صفر است، پس در هر دو معادلهٔ خط به‌جای y، صفر می‌گذاریم:

$$\begin{cases} x - ۳y = ۲ \\ (۲a - ۳)x - y = ۲ \end{cases} \xrightarrow{y=۰} \begin{cases} x = ۲ \\ (۲a - ۳)x = ۲ \end{cases}$$

$$(۲a - ۳) \times ۲ = ۲ \Rightarrow ۴a - ۶ = ۲ \Rightarrow ۴a = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

۲ گزینه ۴

همان‌طور که در شکل مشخص است، دایره در مربع محاط شده است و قطر دایره برابر با طول AB است، پس طبق قضیهٔ فیثاغورس:



$$۲R = \sqrt{(۲ - ۱)^۲ + (۳ - ۲)^۲} = \sqrt{۲} \Rightarrow \text{محیط دایره} = ۲\pi R = \pi\sqrt{۲}$$

۳ گزینه ۲

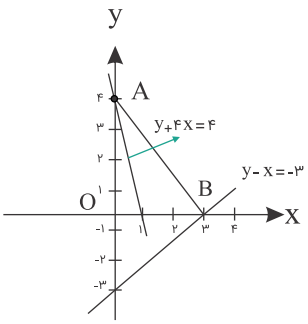
نقطهٔ برخورد خط $y + ۴x = ۴$ با محور yها را بدست می‌آوریم:

$$x = ۰ : \ y + ۴x = ۴ \Rightarrow y = ۴ \Rightarrow A(۰, ۴)$$

همچنین نقطهٔ برخورد خط $y - x = -۳$ با محور xها بدست می‌آوریم:

$$y = ۰ : y - x = -۳ \Rightarrow -x = -۳ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow B(۳, ۰)$$

حال خطوط را رسم می‌کنیم:



در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{AOB}$ داریم:

$$(\overline{AB})^۲ = (\overline{OA})^۲ + (\overline{OB})^۲$$

$$\Rightarrow (\overline{AB})^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۲۵$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = ۵$$

$$\begin{cases} ۲ \times \left(a^۲x + (a+b)y = \frac{۱}{۲} \right) \\ ۳ \times (abx + (a-۲)y = ۳) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a^۲x + (۲a+۲b)y = ۱ \\ ۳abx + (۳a-۶)y = ۹ \end{cases}$$

حال دو معادلهٔ حاصل را باهم جمع می‌کنیم:

$$(۲a^۲ + ۳ab)x + (۵a + ۲b - ۶)y = ۱۰$$

طبق صورت سؤال، با جمع دو معادله $y = ۲$ به دست می‌آید؛ بنابراین:

$$۲a^۲ + ۳ab = ۰ \Rightarrow a(۲a+۳b) = ۰ \Rightarrow a = ۰ \text{ یا } ۲a + ۳b = ۰$$

$$(۵a + ۲b - ۶)y = ۱۰ \xrightarrow{y=۲} ۵a + ۲b - ۶ = ۵ \Rightarrow ۵a + ۲b = ۱۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \\ ۵a + ۲b = ۱۱ \end{cases} \xrightarrow{a=۰} ۲b = ۱۱ \Rightarrow b = \frac{۱۱}{۲}$$

در صورت سؤال a و b اعداد صحیح فرض شده‌اند، بنابراین حالت $b = \frac{۱۱}{۲}$ و $a = ۰$ پذیرفتنی نیست.

$$\begin{cases} ۲a + ۳b = ۰ \\ ۵a + ۲b = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -۲\times \\ ۳\times \end{matrix} \begin{cases} ۲a + ۳b = ۰ \\ ۵a + ۲b = ۱۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۴a - ۶b = ۰ \\ ۱۵a + ۶b = ۳۳ \end{cases} \Rightarrow ۱۱a = ۳۳ \Rightarrow a = ۳$$

$$۲a + ۳b = ۰ \xrightarrow{a=۳} ۲ \times ۳ + ۳b = ۰ \Rightarrow ۳b = -۶ \Rightarrow b = -۲$$

حال مقادیر a، b و y را در معادلهٔ اول دستگاه داده‌شده قرار می‌دهیم تا مقدار x به دست آید، داریم:

$$a^۲x + (a+b)y = \frac{۱}{۲} \xrightarrow[y=۲]{a=۳\,,\,b=-۲} (۳)^۲x + (۳-۲)(۲) = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۹x = \frac{۱}{۲} - ۲ \Rightarrow ۹x = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow x = -\frac{۱}{۶}$$

۵ گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} \text{ضریب } y: ۲m^۲ - ۱۶m + ۳۲ = ۲(m^۲ - ۸m + ۱۶) = ۲(m-۴)^۲ > ۰ \\ \text{ضریب } x: \dfrac{n^۲+۱}{۳} > ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{شیب خط} > ۰$$

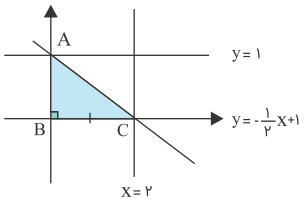
حال به یافتن عرض از مبدأ و طول از مبدأ می‌پردازیم:

$$\left.\begin{array}{l} x = ۰ \Rightarrow y = \dfrac{-۴}{۲(m-۴)^۲} = \dfrac{-۲}{(m-۴)^۲} < ۰ \\ y = ۰ \Rightarrow x = \dfrac{۱۲}{n^۲+۱} > ۰ \end{array}\right\}$$

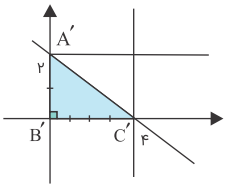
درنتیجه عرض از مبدأ منفی، طول از مبدأ مثبت و شیب مثبت است؛ بنابراین فقط گزینهٔ "۱" ممکن است درست باشد.

۶ گزینه ۳

فرض می‌کنیم خط اول یعنی $y = ax + b$ به‌صورت $y = ۱$ باشد. همچنین خط دوم یعنی $y = cx + d$ به‌صورت $x = ۲$ باشد، همچنین خط سوم یعنی $y = ex + f$ به‌صورت $y = -\frac{۱}{۲}x + ۱$ باشد؛ بنابراین مطابق شکل، از برخورد آن‌ها مثلث ABC به مساحت ۱ واحد ایجاد می‌شود.



حال در حالت جدید، خط اول به‌صورت $y = ۲$، خط دوم به‌صورت $x = ۴$ و خط سوم به‌صورت $y = -\frac{۱}{۲}x + ۲$ در می‌آیند. این سه خط را رسم می‌کنیم.



مساحت مثلث $A'B'C'$ برابر $\frac{۴ \times ۲}{۲} = ۴$ می شود، پس طبق این مثال مساحت مثلث جدید ۴ واحد می‌شود.

۷ گزینه ۴

معادلهٔ هر خط به شکل $y = ax + b$ است. خط از دو نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۹ \end{bmatrix}$ می‌گذرد، پس:

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow ۱ = a \times ۳ + b \Rightarrow ۳a + b = ۱$$

$$\begin{bmatrix} -۱ \\ ۹ \end{bmatrix} \Rightarrow ۹ = a \times (-۱) + b \Rightarrow -a + b = ۹$$

$$\begin{cases} ۳a + b = ۱ \\ a - b = -۹ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین معادله‌ها}} ۴a = -۸ \Rightarrow a = -۲$$

$$-۲ - b = -۹ \Rightarrow b = ۷$$

$$\text{معادلهٔ خط : } y = -۲x + ۷ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \Rightarrow y = -۲ \times ۲ + ۷ = -۴ + ۷ = ۳ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \\ x = ۴ \Rightarrow y = -۲ \times ۴ + ۷ = -۸ + ۷ = -۱ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۴ \\ -۱ \end{bmatrix} \end{cases}$$

۸ گزینه ۱

دو طرف معادلهٔ سوم را در منفی یک ضرب می‌کنیم:

$$-۵x - ۳y - ۳z = -۶۸$$

حال این معادله را با معادله‌های اول و دوم جمع می‌کنیم:

$$(۳x + ۲y + z) + (۲x + ۴y + ۲z) + (-۵x - ۳y - ۳z) = ۳۸ + ۴۸ - ۶۸$$

$$\Rightarrow ۳y = ۱۸ \Rightarrow y = ۶$$

حال دو معادلهٔ اول به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x + ۱۲ + z = ۳۸ \Rightarrow ۳x + z = ۲۶ \\ ۲x + ۲۴ + ۲z = ۴۸ \Rightarrow ۲x + ۲z = ۲۴ \Rightarrow x + z = ۱۲ \end{cases}$$

بنابراین میانگین x، y و z برابر است با:

$$\text{میانگین} = \frac{x + z + y}{۳} = \frac{۱۲ + ۶}{۳} = ۶$$

۹ گزینه ۲

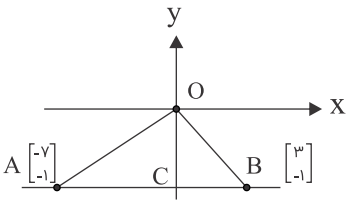
می‌دانیم یکی از اضلاع $\overset{\Delta}{OAB}$ موازی و غیرمنطبق بر محور طول‌ها است. چون O مبدأ مختصات است، ضلع موازی با محور طول‌ها ضلع AB است؛ بنابراین عرض نقطهٔ A با عرض نقطهٔ B برابر است و همچنین چون C روی پاره‌خط AB است، یقیناً روی محور عرض‌ها است:

$$۳n+۲=-۲n-۳ \Rightarrow n=-۱ \Rightarrow A=\begin{bmatrix}-۷\\-۱\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}۳\\-۱\end{bmatrix} \Rightarrow C=\begin{bmatrix}۰\\-۱\end{bmatrix}$$

ارتفاع مثلث‌های OAC و OBC هر دو برابر با یک واحد است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OAC}}}{S_{\overset{\Delta}{OBC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times ۱\times(۷-۰)}{\frac{۱}{۲}\times ۱\times(۳-۰)}=\frac{\frac{۷}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۷}{۳}$$

درواقع شکل به‌صورت زیر است:



۱۰ گزینه ۲

$$ax+by=c \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b} \xrightarrow{\text{عرض از مبدأ مثبت}} \frac{c}{b}>0 \Rightarrow a,b,c \text{ هم‌علامت‌اند} \quad (1)$$

$$1)\ ||ab|+c|=c-ab \Rightarrow |ab|+c=c-ab \Rightarrow |ab|=-ab \Rightarrow a,b \text{ مختلف‌العلامت} \quad (1')$$

$$2)\ ||ab|+c|=c-ab \Rightarrow |ab|+c=ab-c \Rightarrow |ab|-ab=-2c$$

$$\xrightarrow{(2)} \begin{cases} -2ab=-2c \Rightarrow ab=c \xrightarrow{(1)} a,b \text{ هم‌علامت} \\ \text{یا} \\ 0=-2c \Rightarrow c=0 \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

ازطرفی:

$$|a|+|b|=3\ ,\ a,b\neq 0\ ,\ a,b\in\mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} |a|=1\ ,|b|=2 \\ \text{یا} \\ |a|=2\ ,|b|=1 \end{cases} \quad (*)$$

در هر دو حالت شرایط (*) حاصل‌ضرب a و b برابر ۳ نیست، پس حالت (۲) برقرار نیست. حال از (۱) و $(1')$ نتیجه می‌شود که a و c مختلف‌العلامت هستند. بنابراین حالات زیر را داریم:

$$a=1,b=-2,c=-3$$
$$a=-1,b=2,c=3$$

$$a=-2,b=1,c=3$$
$$a=2,b=-1,c=-3$$

از طرف دیگر:

$$||ab|+c|=c-ab \Rightarrow c-ab\geq 0 \Rightarrow c\geq ab \quad (3)$$

دقت کنید درصورتی‌که $a=1,b=-2,c=-3$ و $a=2,b=-1,c=-3$ باشد، (۳) برقرار نیست، پس تنها دو حالت وجود دارد.

۱۱ گزینه ۳

در هر دو معادله به‌جای x مقدار ۲ را قرار می‌دهیم. باید مقادیری که برای y به دست می‌آوریم، در دو معادله برابر باشد.

$$x=2 \Rightarrow 2(y-m)=2+10 \Rightarrow 2y-2m=12 \Rightarrow y=6+m$$

$$x=2 \Rightarrow y=(m+1)\times 2+7 \Rightarrow y=2m+2+7 \Rightarrow y=2m+9$$

$$\Rightarrow 2m+9=6+m \Rightarrow 2m-m=6-9 \Rightarrow m=-3$$

۱۲ گزینه ۴

در مربع اضلاع روبه‌رو با یکدیگر موازی هستند؛ بنابراین شیب ضلع CD با شیب ضلع AB برابر است. داریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۳ - ۱}{۱ - ۱} = \frac{۲}{۰} \text{ تعریف‌نشده}$$

بنابراین ضلع AB موازی با محور yها بوده و معادلهٔ آن به‌صورت $x = ۱$ است، پس معادلهٔ ضلع CD نیز به‌صورت $x = a$ درمی‌آید و چون این خط از نقطهٔ $C = (۳ , ۳)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت $x = ۳$ خواهد بود.

۱۳ گزینه ۴

شرط عمود بودن دو خط این است که شیب‌ها عکس و قرینه باشند، پس با به دست آوردن شیب‌خط AB و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم، آن‌ها را عکس و قرینهٔ هم قرار می‌دهیم:

$$m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۵k + ۱ - ۲k - ۱۲}{۴k - ۶ - ۳k + ۱} = \frac{۳k - ۱۱}{k - ۵}$$
$$y = +x \Rightarrow m = +۱ \Rightarrow m' = -۱$$
$$\Rightarrow \frac{۳k - ۱۱}{k - ۵} = -۱ \Rightarrow k = ۴$$

۱۴ گزینه ۱

برای به دست آوردن ناحیهٔ محصور بین خط و محورهای مختصات که می‌دانیم یک مثلث قائم‌الزاویه است، محل برخورد خط با هریک از محورها را به دست می‌آوریم:

$$۳x - ۴y - ۱ = ۱۱ \Rightarrow ۳x - ۴y = ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = -۳ \\ y = ۰ \Rightarrow x = ۴ \end{cases}$$

$$\text{مساحت} = \frac{|-۳ \times ۴|}{۲} = ۶$$

۱۵ گزینه ۴

ابتدا با استفاده از شیب اضلاع، رأس قائمه را پیدا می‌کنیم.

$$m_{AB} = \frac{۲-۵}{-۴-(-۱)} = \frac{-۳}{-۳} = ۱$$
$$m_{AC} = \frac{-۳-۵}{۱-(-۱)} = \frac{-۸}{۲} = -۴ \Rightarrow AB \perp BC \Rightarrow \hat{B} = ۹۰^\circ$$
$$m_{BC} = \frac{-۳-۲}{۱-(-۴)} = \frac{-۵}{۵} = -۱$$

پس AC وتر است. مختصات M وسط AC را تعیین می‌کنیم.

$$M \left| \begin{matrix} \frac{-۱+۱}{۲} \\ \frac{۵+(-۳)}{۲} \end{matrix} \right. \Rightarrow M \left| \begin{matrix} ۰ \\ ۱ \end{matrix} \right.$$

$$\text{طول } BM = \sqrt{(۰-(-۴))^۲ + (۱-۲)^۲} = \sqrt{۴^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۱۷}$$

۱۶ گزینه ۱

ابتدا محل برخورد با محور x (طول از مبدأ) را از قرار دادن $y = ۰$ در معادلهٔ خط به دست می‌آوریم:

$$y = ۰ \Rightarrow \cancel{۴ \times ۰} = ۳x + ۱۲ \Rightarrow x = -۴$$

پس مختصات محل برخورد با محور x برابر $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$ است. حال با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، فاصلهٔ $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۴۰ \\ -۲۷ \end{bmatrix}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt{(-۴-(-۴۰))^۲ + (۰-(-۲۷))^۲} = \sqrt{۳۶^۲ + ۲۷^۲} = \sqrt{۲۰۲۵} = ۴۵$$

چون با سرعت یک واحد بر ثانیه حرکت می‌کند، بنابراین پس از ۴۵ ثانیه به محور xها می‌رسد.

۱۷ گزینه ۳

زمانی سه خط تشکیل مثلث می‌دهند که دوبه‌دو متقاطع باشند و زمانی دو خط باهم متقاطع‌اند که شیب آن‌ها یکی نباشد. شیب خط اول برابر با ۲ و شیب خط دوم برابر با $\frac{۲}{۳}$ است. تنها گزینه‌ای که شیبش با دو خط دیگر متفاوت باشد، گزینهٔ "۳" است.

۱۸ گزینه ۲

راه‌حل اول:

سرعت محسن $\sqrt{۴۰}$ کیلومتر بر ساعت است، یعنی در یک ساعت $\sqrt{۴۰}$ کیلومتر می‌دود. $\sqrt{۴۰}$ کیلومتر معادل $۱۰۰۰ \times \sqrt{۴۰}$ متر است؛ بنابراین مسیر ۱۰۰ متری را به تعداد $\frac{۱۰۰۰ \times \sqrt{۴۰}}{۱۰۰}$ یعنی $۱۰\sqrt{۴۰}$ (تقریباً معادل ۶۴) بار می‌دود. سرعت سعید ۸ کیلومتر بر ساعت است، یعنی ۸۰۰۰ متر بر ساعت است؛ بنابراین سعید مسیر را به ۸۰ بار طی می‌کند. محسن طبق جدول تناسب زیر، هر ۱۰۰ متر را تقریباً در ۰/۹۵ دقیقه طی می‌کند.

۱۰۰	$۱۰۰۰\sqrt{۴۰}$ متر
x	۶۰ دقیقه

$$\Rightarrow x = \frac{۶۰۰۰}{۱۰۰۰\sqrt{۴۰}} = \frac{۶}{\sqrt{۴۰}} = ۰/۹۵'$$

سعید نیز طبق جدول تناسب زیر، هر ۱۰۰ متر را در ۰/۷۵ دقیقه طی می‌کند.

۱۰۰	۸۰۰۰ متر
x	۶۰ دقیقه

$$\Rightarrow x = \frac{۶۰۰۰}{۸۰۰۰} = \frac{۶}{۸} = ۰/۷۵'$$

بنابراین هر بار که سعید به آخر مسیر می‌رسد، هنوز محسن باید ۰/۲۰ دقیقه دیگر بدود تا به انتهای مسیر برسد که در این مدت نیز سعید دوباره محسن را می‌بیند؛ بنابراین به تعداد دفعات رفت و برگشت سعید یعنی ۸۰ بار این دو نفر یکدیگر را می‌بینند.

راه‌حل دوم:

باتوجه‌به اینکه سرعت سعید بیشتر از سرعت محسن است، کافی است محسن به عنوان نقطه‌ای از مسیر در نظر گرفته شود که دائماً در حال تغییر می‌باشد، حال با این نگاه چون سعید در هر رفت و برگشت از تمامی نقاط مسیر عبور می‌کند درنتیجه ۸۰ بار محسن را ملاقات خواهد کرد.

۱۹ گزینه ۲

$$\left.\begin{matrix} \begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix} \xrightarrow{y_۱=ax+b} ۲ = a + b \\ \begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix} \xrightarrow{y_۲=cx-d} ۲ = c - d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + b = c - d \Rightarrow a + b + d = c$$

۲۰ گزینه ۱

محل تقاطع دو خط جایی است که شیرهای خروجی از کار افتاده‌اند. باتوجه‌به شکل، شیب خط سمت راست نقطهٔ تقاطع، برابر $\frac{۴ - ۱۳}{۶ - ۰} = -\frac{۳}{۲}$ و شیب خط سمت چپ برابر با $\frac{۰ - ۴}{۱۴ - ۶} = -\frac{۱}{۲}$ است.

پس قدرت خروج $\frac{۱}{۳}$ حالت قبلی است. بنابراین تعداد شیرها نیز $\frac{۱}{۳}$ حالت قبلی، یعنی $۱۲ \times \frac{۱}{۳} = ۴$ است.