۱ گزینه ۱

دو عدد ۱/۹۹۹۹ و ۱۶۰۰/۹۹۹۹ را در نظر می‌گیریم. اگر هرکدام از این اعداد را با تقریب کمتر از یک قطع کنیم، به ۱ و ۱۶۰۰ می‌رسیم که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱۶۰۰ می‌شود. حال اگر ابتدا این اعداد را ضرب کنیم، حاصل برابر ۳۲۰۱/۸۳۹۷ می‌شود که قطع شدهٔ آن با تقریب کمتر از یک برابر ۳۲۰۱ می‌شود.

۲ گزینه ۲

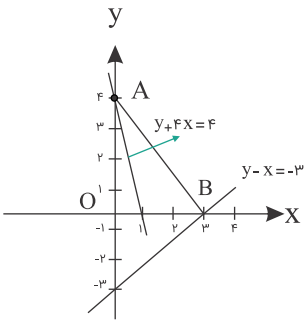
نقطهٔ برخورد خط $y + ۴x = ۴$ با محور yها را بدست می‌آوریم:

$$x = ۰ : \ y + ۴x = ۴ \Rightarrow y = ۴ \Rightarrow A(۰, ۴)$$

همچنین نقطهٔ برخورد خط $y - x = -۳$ با محور xها بدست می‌آوریم:

$$y = ۰ : y - x = -۳ \Rightarrow -x = -۳ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow B(۳, ۰)$$

حال خطوط را رسم می‌کنیم:



در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{AOB}$ داریم:

$$(\overline{AB})^۲ = (\overline{OA})^۲ + (\overline{OB})^۲$$

$$\Rightarrow (\overline{AB})^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۲۵$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = ۵$$

۳ گزینه ۲

ابتدا معادلهٔ خط را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{-x+۲}{۴}+\frac{y-۵}{۳}=۰ \xrightarrow{\times(۱۲)} -۳x+۶+۴y-۲۰=۰ \\ \Rightarrow -۳x+۴y-۱۴=۰ \Rightarrow ۴y=۳x+۱۴ \Rightarrow y=\frac{۳}{۴}x+\frac{۷}{۲}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط}: \frac{۳}{۴} \quad \text{و} \quad \text{عرض از مبدأ خط}: \frac{۷}{۲}$$

۴ گزینه ۲

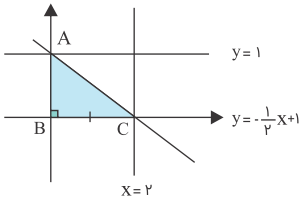
برای اینکه دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، باید دو خط بر هم منطبق باشند؛ یعنی یک خط مضربی از خط دیگر باشد.

$$\begin{cases}۷x=۴y+۵ \\ ۱۴x-k=۸y+۷\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۷x-۴y=۵ \\ ۱۴x-۸y=۷+k\end{cases} \Rightarrow \frac{۷}{۱۴}=\frac{-۴}{-۸}=\frac{۵}{۷+k}$$

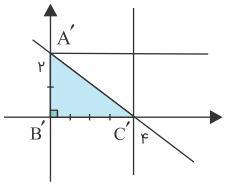
$$\Rightarrow \frac{۵}{۷+k}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۷+k=۱۰ \Rightarrow k=۳$$

۵ گزینه ۳

فرض می‌کنیم خط اول یعنی $y = ax + b$ به‌صورت $y = ۱$ باشد. همچنین خط دوم یعنی $y = cx + d$ به‌صورت $x = ۲$ باشد، همچنین خط سوم یعنی $y = ex + f$ به‌صورت $y = -\frac{۱}{۲}x + ۱$ باشد؛ بنابراین مطابق شکل، از برخورد آن‌ها مثلث ABC به مساحت ۱ واحد ایجاد می‌شود.



حال در حالت جدید، خط اول به‌صورت $y = ۲$، خط دوم به‌صورت $x = ۴$ و خط سوم به‌صورت $y = -\frac{۱}{۲}x + ۲$ در می‌آیند. این سه خط را رسم می‌کنیم.



مساحت مثلث $A'B'C'$ برابر $\frac{۴ \times ۲}{۲} = ۴$ می شود، پس طبق این مثال مساحت مثلث جدید ۴ واحد می‌شود.

۶ گزینه ۴

$$d_۱ : \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow y = ۰$$

$$d_۲ : \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱۰ \end{bmatrix} \Rightarrow x = ۰$$

دو خط یاد شده روی محورهای مختصات هستند. محل برخورد آن‌ها مبدأ مختصات است و حاصل‌جمع طول و عرض مختصات آن صفر می‌شود.

۷ گزینه ۱

$$\begin{cases}\frac{x+y}{۲}-\frac{y-۲x}{۳}=۴\\ \frac{y}{x}-۱=\frac{۴}{x}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{۳x+۳y-۲y+۴x}{۶}=۴\Rightarrow ۷x+y=۲۴\\ y-x=۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۷x+y=۲۴\\ y-x=۴\end{cases}\xrightarrow{(-)}۸x=۲۰\Rightarrow x=\frac{۲۰}{۸}=۲/۵\Rightarrow y=۶/۵\Rightarrow x+y=۹$$

۸ گزینه ۳

زمانی سه خط تشکیل مثلث می‌دهند که دوبه‌دو متقاطع باشند و زمانی دو خط باهم متقاطع‌اند که شیب آن‌ها یکی نباشد. شیب خط اول برابر با ۲ و شیب خط دوم برابر با $\frac{۲}{۳}$ است. تنها گزینه‌ای که شیبش با دو خط دیگر متفاوت باشد، گزینهٔ "۳" است.

۹ گزینه ۳

x را تعداد کتاب‌های علی و y را تعداد کتاب‌های رضا در نظر می‌گیریم:

باتوجه‌به سؤال : $\begin{matrix}x=۳y+۶\\ x-y=۱۴\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}x-۳y=۶\\ x-y=۱۴\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-۳y=۶\\ -x+y=-۱۴\end{cases}\Rightarrow -۲y=-۸\Rightarrow y=۴\Rightarrow x=۱۸\Rightarrow x+y=۲۲$$

دقت کنید که باتوجه‌به صورت سؤال تعداد کتاب‌های علی بیشتر است؛ پس $x-y=۱۴$ صحیح است نه $y-x=۱۴$.

۱۰ گزینه ۴

ابتدا شیب‌خط موردنظر را پیدا کرده و سپس معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$۲x-۳y=۶\Rightarrow -۳y=-۲x+۶\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x-۲\Rightarrow \text{شیب}=\frac{۲}{۳}$$

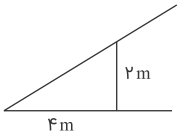
معادلهٔ خط را با داشتن شیب و یک نقطهٔ آن می‌نویسیم:

$$y=ax+b\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x+b$$

$$\left|\begin{matrix}۳\\ -۴\end{matrix}\right.\Rightarrow -۴=\frac{۲}{۳}\times ۳+b\Rightarrow -۴=۲+b\Rightarrow b=-۶$$ عرض از مبدأ

۱۱ گزینه ۲

نکته: شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با محور افقی می‌سازد.



$$\text{شیب} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

۱۲ گزینه ۴

شرط عمود بودن دو خط این است که شیب‌ها عکس و قرینه باشند، پس با به دست آوردن شیب‌خط AB و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم، آن‌ها را عکس و قرینهٔ هم قرار می‌دهیم:

$$m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۵k + ۱ - ۲k - ۱۲}{۴k - ۶ - ۳k + ۱} = \frac{۳k - ۱۱}{k - ۵}$$
$$y = +x \Rightarrow m = +۱ \Rightarrow m' = -۱$$
$$\Rightarrow \frac{۳k - ۱۱}{k - ۵} = -۱ \Rightarrow k = ۴$$

۱۳ گزینه ۲

در $\overset{\Delta}{OAB}$، $\hat{O} = ۹۰^\circ$ است، پس طبق رابطهٔ فیثاغورس:

$$AB^۲ = OA^۲ + OB^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = ۶^۲ + OB^۲ \Rightarrow OB^۲ = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow OB = ۸$$

$$\text{شیب خط} = \frac{OB}{OA} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

۱۴ گزینه ۳

نقطهٔ موردنظر مختصات $\begin{bmatrix} ۰ \\ b \end{bmatrix}$ دارد؛ بنابراین:

$$d_۱ : (a - ۱) \times ۰ = ۲b - ۱ = ۰ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

پس مختصات نقطهٔ تلاقی $\begin{bmatrix} ۰ \\ \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ است؛ بنابراین:

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} : ۰ + ۳ = (a + ۲) \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}(a + ۲) = ۳ \Rightarrow a + ۲ = ۶ \Rightarrow a = ۴$$

۱۵ گزینه ۳

شیب خط مثبت است (رد گزینه‌های "۱" و "۴") و به ازای $x = ۰$، $y = -۲$ است، یعنی از مبدأ نمی‌گذرد (رد گزینهٔ "۲").

۱۶ گزینه ۲

راه‌حل اول:

سرعت محسن $\sqrt{۴۰}$ کیلومتر بر ساعت است، یعنی در یک ساعت $\sqrt{۴۰}$ کیلومتر می‌دود. $\sqrt{۴۰}$ کیلومتر معادل $۱۰۰۰ \times \sqrt{۴۰}$ متر است؛ بنابراین مسیر ۱۰۰ متری را به تعداد $\frac{۱۰۰۰ \times \sqrt{۴۰}}{۱۰۰}$ یعنی $۱۰\sqrt{۴۰}$ (تقریباً معادل ۶۴) بار می‌دود. سرعت سعید ۸ کیلومتر بر ساعت است، یعنی ۸۰۰۰ متر بر ساعت است؛ بنابراین سعید مسیر را به ۸۰ بار طی می‌کند. محسن طبق جدول تناسب زیر، هر ۱۰۰ متر را تقریباً در ۰/۹۵ دقیقه طی می‌کند.

۱۰۰	$۱۰۰۰\sqrt{۴۰}$ متر
x	۶۰ دقیقه

$$\Rightarrow x = \frac{۶۰۰۰}{۱۰۰۰\sqrt{۴۰}} = \frac{۶}{\sqrt{۴۰}} = ۰/۹۵'$$

سعید نیز طبق جدول تناسب زیر، هر ۱۰۰ متر را در ۰/۷۵ دقیقه طی می‌کند.

۱۰۰	۸۰۰۰ متر
x	۶۰ دقیقه

$$\Rightarrow x = \frac{۶۰۰۰}{۸۰۰۰} = \frac{۶}{۸} = ۰/۷۵'$$

بنابراین هر بار که سعید به آخر مسیر می‌رسد، هنوز محسن باید ۰/۲۰ دقیقه دیگر بدود تا به انتهای مسیر برسد که در این مدت نیز سعید دوباره محسن را می‌بیند؛ بنابراین به تعداد دفعات رفت و برگشت سعید یعنی ۸۰ بار این دو نفر یکدیگر را می‌بینند.

راه‌حل دوم:

باتوجه‌به اینکه سرعت سعید بیشتر از سرعت محسن است، کافی است محسن به عنوان نقطه‌ای از مسیر در نظر گرفته شود که دائماً در حال تغییر می‌باشد، حال با این نگاه چون سعید در هر رفت و برگشت از تمامی نقاط مسیر عبور می‌کند درنتیجه ۸۰ بار محسن را ملاقات خواهد کرد.

۱۷ گزینه ۳

نقطه را به‌صورت $\begin{bmatrix} m \\ -\frac{۱}{m} \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم، پس داریم:

$$۴m + \frac{۱}{m} = ۵ \Rightarrow \frac{۴m^۲ + ۱}{m} = ۵ \Rightarrow ۴m^۲ + ۱ = ۵m$$

$$\Rightarrow ۴m^۲ - ۵m + ۱ = ۰ \Rightarrow (m-۱)(۴m-۱) = ۰ \Rightarrow m = ۱ \ , \ m = \frac{۱}{۴}$$

$$m = ۱ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \ , \ m = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} \\ -۴ \end{bmatrix}$$

۱۸ گزینه ۲

$$\begin{cases} y = ۱۷ - ۳x \\ y = x + ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} y = ۱۷ - ۳x \\ \underline{-y = -x - ۲} \end{array}$$

$$۰ = -۴x + ۱۵ \Rightarrow ۴x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۴}$$

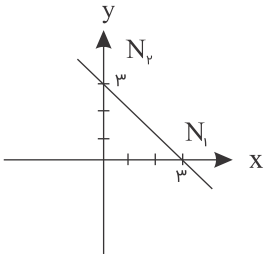
$$y = x + ۲ \xrightarrow{x=\frac{۱۵}{۴}} y = \frac{۱۵}{۴} + ۲ = \frac{۲۳}{۴}$$

نقطهٔ برخورد در ناحیهٔ اول قرار دارد، چون هم طول آن عددی مثبت است و هم عرض آن:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱۵}{۴} \\ \frac{۲۳}{۴} \end{bmatrix}$$

۱۹ گزینه ۴

محل تلاقی خط $x + y = ۳$ را با هریک از محور xها و yها به دست می‌آوریم، داریم:



$$x + y = ۳ \xrightarrow{\text{محل تلاقی با محور xها}} x + ۰ = ۳ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow N_۱ = (۳, ۰)$$

$$x + y = \xrightarrow{\text{محل تلاقی با محور yها}} ۰ + y = ۳ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow N_۲ = (۰, ۳)$$

۲۰ گزینه ۴

با جایگذاری اعداد در گزینه‌ها، رابطهٔ گزینهٔ "۴" به دست می‌آید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$۳x$	-۶	-۳	۰	۳	۶
$y=۳x+۱$	-۵	-۲	۱	۴	۷