



گزینه ۳

۱

$۷۷ = ۷ \times ۱۱$ ؛ در نتیجه عددی در مربع قرار می‌گیرد که عامل مشترکی با ۷۷ نداشته باشد:

$$۹۱ = ۱۳ \times ۷, \quad ۱۴۳ = ۱۱ \times ۱۳$$

$$۲۸۹ = ۱۷^۲, \quad ۱۳۳۱ = ۱۱^۳$$

گزینه ۳ صحیح است.

گزینه ۲

۲

$$۴۸ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳$$

$$\left. \begin{array}{l} z = ۴۸ \\ x = ۲۴ \\ y = ۳ \end{array} \right\} \Rightarrow ۲۴ \times ۳ + ۴۸ = ۷۲ + ۴۸ = ۱۲۰$$

گزینه ۴

۳

باتوجه به $(a, c) = b$ و $[a, c] = ۲b$ نتیجه می‌گیریم یکی از اعداد a یا c برابر با b و دیگری $۲b$ است.
یعنی:

$$a + c = b + ۲b = ۳b \Rightarrow a + b + c = ۳b + b = ۴b$$

گزینه ۱

۴

تفاضل دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود. ۹۶۷۱۷ فرد است، پس یکی از مربعات ۴ است که مربع عدد ۲ است، چون ۲ تنها عدد اول زوج است. اگر عدد دیگر را a در نظر بگیریم، داریم:

$$a^۲ - ۴ = ۹۶۷۱۷ \Rightarrow a^۲ = ۹۶۷۱۷ + ۴ = ۹۶۷۲۱$$

$$۹۶۷۲۱ = ۳۱۱^۲ \Rightarrow a = ۳۱۱$$

$$a + ۲ = ۳۱۱ + ۲ = ۳۱۳$$

گزینه ۱: هر دو عدد، اول هستند.

گزینه ۲: یکی از اعداد (۵) اول است.

گزینه ۳: هر دو عدد مرکب هستند ولی نسبت به هم اول نیستند. $(25, 10) = 5$

گزینه ۴: هر دو عدد مرکب هستند و نسبت به هم اول هستند. $(9, 10) = 1$

چون مجموع برابر با ۱۳۳۹ و عددی فرد است؛ بنابراین یکی از اعداد زوج و دیگری فرد است. تنها عدد اولی که مکعب آن زوج است، عدد ۲ است که مکعب آن برابر با ۸ است؛ بنابراین:

$$2^3 + a^3 = 1339 \Rightarrow a^3 = 1339 - 8 = 1331 = 11 \times 11 \times 11 \Rightarrow a = 11$$

$$\xrightarrow{\text{مکعب مجموع}} (2 + 11)^3 = 1331 = 11^3 = 1331$$

عدد اول دیگر برابر با ۱۱ است.

$$121^7 = (11^2)^7 = 11^{14}$$

$$11^{14} \text{ مقسوم‌علیه‌های } = \{1, 11^1, 11^2, \dots, 11^{14}\} \Rightarrow 15 \text{ تا}$$

$$56 = 2^3 \times 7 \Rightarrow 56 \text{ مقسوم‌علیه‌های } = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$$

$$1 \times 2 \times 4 \times 7 \times 8 \times 14 \times 28 \times 56 = \underbrace{1 \times 56}_{56} \times \underbrace{2 \times 28}_{56} \times \underbrace{4 \times 14}_{56} \times \underbrace{7 \times 8}_{56} = 56^4$$

نکته: هرگاه تجزیه‌شده عدد A به صورت $A = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \dots$ باشد (a و b و c مقسوم‌علیه‌های اول A هستند)، تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد A از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$T = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$$

در اینجا A به صورت حاصل ضرب اعداد اول نوشته شده است، در نتیجه:

$$A \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های } = (x + 2)(x + 1)$$

$$x = 5 \Rightarrow 7 \times 6 = 42$$

$$x = 6 \Rightarrow 8 \times 7 = 56$$

$$x = 3 \Rightarrow 5 \times 4 = 20$$

$$x = 4 \Rightarrow 6 \times 5 = 30$$

پس به ازای $x = 3$ ، تعداد مقسوم‌علیه‌های A ، ۲۰ می‌شود.

توجه: دو عدد نسبت به هم اول هستند، اگر ب.م.م آن‌ها یک باشد.
 گزینه "۱": نادرست است؛ زیرا ۸ و ۹ هر دو مرکب‌اند ولی $(۸, ۹) = ۱$.
 گزینه "۲": نادرست است؛ زیرا ۹ مرکب و ۳ اول است ولی $(۳, ۹) = ۳$.
 گزینه "۳": درست است؛ زیرا اعداد اول دورقمی همگی فرد هستند و جمع دو عدد فرد همواره زوج است.
 گزینه "۴": نادرست است؛ زیرا همه اعداد اول نسبت به هم اول هستند.

گزینه "۱": اعداد طبیعی به سه دسته اعداد اول، مرکب و عدد یک تقسیم می‌شوند.
 گزینه "۲": $(۸, ۹) = ۱$ که نسبت به هم اول هستند ولی هر دو عدد مرکب‌اند.
 گزینه "۴": ۴۹ عدد اول نیست، چون مضربی از ۷ است.

دو عدد اول یا هر دو فرد هستند یا یکی زوج و یکی فرد است. از آنجاکه تنها عدد اول زوج، عدد ۲ است که کوچک‌ترین عدد اول نیز هست، در هر دو حالت، جواب سؤال یک عدد فرد می‌شود که البته اول نیز هست.

بزرگ‌ترین عدد مرکب یک‌رقمی ۹ است. از آنجاکه ۹۹ و ۹۸ مرکب هستند باید بررسی کنیم که ۹۷ بزرگ‌ترین عدد اول دورقمی است یا خیر. برای این کار باید دید که عدد ۹۷ بر اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{۹۷}$ بخش‌پذیر است یا خیر.
 با بررسی اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰ متوجه می‌شویم که ۹۷ بر هیچ‌کدام از آن‌ها بخش‌پذیر نبوده و بنابراین اول است. ک.م.م دو عدد ۹۷ و ۹ حاصل‌ضرب آن‌ها است: $۹ \times ۹۷ = ۸۷۳$
 مقسوم‌علیه‌های طبیعی این عدد برابر است با: $\{۱, ۳, ۹, ۹۷, ۲۹۱, ۸۷۳\}$
 در بین این اعداد ۹، ۲۹۱ و ۸۷۳ مرکب هستند.

هر عددی که بتوانیم آن را به صورت حاصل‌ضرب اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک بنویسیم، عددی مرکب است. مثال:

$$۴۹ = ۷ \times ۷$$

هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک که فقط بر خودش و یک بخش‌پذیر باشد، عدد اول است. مثال: ۲۹
 تنها مضرب طبیعی اول هر عدد اول، برابر با خود آن عدد است. مقسوم‌علیه‌های اول عدد ۱۵، اعداد ۳ و ۵ هستند.

تنها با جایگذاری مقادیر گزینه ۲، $۱۲x^2y$ مربع کامل می‌شود:

$$x = ۵, y = ۳$$

$$۱۲x^2y = ۲^2 \times ۳ \times x^2 \times y = ۲^2 \times ۳ \times ۵^2 \times ۳ = ۲^2 \times ۳^2 \times ۵^2$$

گزینه ۳

۱۶

اعداد اول بین ۶۰ و ۷۰ عبارت‌اند از: ۶۱ و ۶۷

گزینه ۴

۱۷

شمارش اعداد طبیعی دورقمی مربع کامل ساده‌تر است؛ بنابراین تمام اعداد دورقمی مربع کامل را می‌نویسیم و عددهای قبل و بعد از آن را در نظرمی‌گیریم تا ببینیم در بین آن‌ها عدد اولی قرار دارد یا نه:

عدد ۱۰ عدد طبیعی دورقمی است که قبل آن عددی مربع کامل و بعد آن عدد اول است $\Rightarrow 11 \ 10 \ 9 \ 8 \ 7$

قابل قبول نیست $\Rightarrow 17 \ 16 \ 15 \ 14$

عدد ۲۴ عدد طبیعی دورقمی است که بعد از آن یک مربع کامل و قبل از آن عددی اول قرار دارد $\Rightarrow 27 \ 26 \ 25 \ 24 \ 23$

قابل قبول نیست $\Rightarrow 38 \ 37 \ 36 \ 35 \ 34$

عدد ۴۸ عدد طبیعی دورقمی است که بعد از آن یک مربع کامل و قبل از آن عددی اول قرار دارد $\Rightarrow 51 \ 50 \ 49 \ 48 \ 47$

قابل قبول نیست $\Rightarrow 66 \ 65 \ 64 \ 63 \ 62$

عدد ۸۰ عدد طبیعی دورقمی است که بعد از آن یک مربع کامل و قبل از آن عددی اول قرار دارد $\Rightarrow 83 \ 82 \ 81 \ 80 \ 79$
عدد ۸۲ نیز قابل قبول است. بعد از آن عددی اول و قبل از آن یک مربع کامل قرار دارد

گزینه ۳

۱۸

$\{1, 3, 5, 7, 11, 15, 21, 33, 35, 55, 77, 105, 165, 231, 385, 1155\}$ = مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۱۵۵

$\{3, 5, 7, 11\}$ = مقسوم‌علیه‌های اول عدد ۱۱۵۵

گزینه ۳

۱۹

ب.م.م دو عدد زوج نمی‌تواند یک باشد، چون مقسوم‌علیه مشترک ۲ دارند.

گزینه ۳

۲۰

برای بخش‌پذیر است $1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$ $14641 = 1 - 4 + 6 - 4 + 1$

زوج = فرد + فرد $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2019^{2019} \text{ فرد است} \\ 1397^{1397} \text{ فرد است} \end{array} \right\}$

گزینه ۳ صحیح است.