۱ گزینه ۲

$$x = \frac{۱}{\sqrt{۱۱^۵}\sqrt{۱۱^{۱۰}}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۱^۵ \times ۱۱^۵}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۱^{۱۰}}} = \frac{۱}{۱۱^۵} = ۱۱^{-۵}$$

۲ گزینه ۴

با ساده‌سازی داریم:

$$I = \frac{۲^{۲(۲x+۲)} \times ۲^{۲(x-۱)} \times ۳^{(x-۱)} \times ۲^{x} \times ۳^{۲x}}{۲^{۳(x-۲)} \times ۳^{(x+۱)}} = \frac{۲^{۴x} \times ۲^{۴} \times ۲^{۲x} \times ۲^{-۲} \times ۳^{x} \times ۳^{-۱} \times ۲^{x} \times ۳^{۲x}}{۲^{۳x} \times ۲^{-۶} \times ۳^{x} \times ۳^{۱}}$$

$$= \frac{۲^{۷x} \times ۲^{۲} \times ۳^{۳x} \times ۳^{-۱}}{۲^{۳x} \times ۲^{-۶} \times ۳^{x} \times ۳} = ۲^{۴x} \times ۲^{۸} \times ۳^{۲x} \times ۳^{-۲}$$

$$= \frac{۲^{۸}}{۳^{۲}} \times (۲^{x})^{۴} \times (۳^{x})^{۲} = \frac{۲۵۶}{۹} \times a^{۴}b^{۲}$$

۳ گزینه ۳

ابتدا مقدار x و y را به دست می‌آوریم:

$$x = ۲\sqrt{۳}\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۲۷}}\right) = \frac{۲\cancel{\sqrt{۳}}}{\cancel{\sqrt{۳}}} + \frac{۲\cancel{\sqrt{۳}}}{\cancel{\sqrt{۲۷}}_{\sqrt{۹}}} = ۲ + \frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

$$y = ۲\sqrt{۵}\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}} - \frac{۱}{\sqrt{۲۰}}\right) = \frac{۲\cancel{\sqrt{۵}}}{\cancel{\sqrt{۵}}} - \frac{۲\cancel{\sqrt{۵}}}{\cancel{\sqrt{۲۰}}_{\sqrt{۴}}} = ۲ - ۱ = ۱$$

حال حاصل $y - x$ برابر است با:

$$۱ - \frac{۸}{۳} = -\frac{۵}{۳}$$

۴ گزینه ۲

ابتدا عدد را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم. باید مقسوم‌علیه را طوری بیابیم که توان‌های عوامل حاصل تقسیم مضربی از ۳ باشند، پس:

$$۴۰۵۰۰۰ = ۲^{۳} \times ۳^{۴} \times ۵^{۴} \Rightarrow ۲^{۳} \times ۳^{۴} \times ۵^{۴} \div (۳ \times ۵) = ۲^{۳} \times ۳^{۳} \times ۵^{۳}$$

۵ گزینه ۲

ابتدا عدد a را به‌صورت توانی از p می‌نویسیم: $p^n = a$

شمارنده‌های عدد a به‌صورت p^n ، ... ، $p^۲$ ، $p^۱$ ، $p^۰$ است که حاصل‌ضرب آن‌ها به‌صورت زیر می‌باشد:

$$p^۰ \times p^۱ \times p^۲ \times \ldots \times p^n = p^{\frac{n(n+۱)}{۲}}$$

پس توان p باید به‌صورت نصف حاصل‌ضرب دو عدد متوالی باشد با بررسی گزینه‌ها فقط برای گزینه ۲ این حالت را داریم.

$$\frac{n(n+۱)}{۲} = ۱۰ \Rightarrow n(n+۱) = ۲۰ \Rightarrow n = ۴$$

۶ گزینه ۴

$$a = ۴^{(-۴)^{-۴}}$$

$$\sqrt{۴^{۴^{(-۴)-۴}}} = \sqrt{۴^a} = (۴^a)^{\frac{۱}{۲}} = (۴^{\frac{۱}{۲}})^a = (\sqrt{۴})^a = ۲^a = ۲^{۴^{(-۴)^{-۴}}}$$

۷ گزینه ۳

$$\sqrt{۲۷} = \sqrt{۳^۳} = ۳\sqrt{۳} \quad , \quad \sqrt{۱۲} = \sqrt{۴ \times ۳} = ۲\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۷۵} = \sqrt{۲۵ \times ۳} = ۵\sqrt{۳} \quad , \quad \sqrt{۴۸} = \sqrt{۱۶ \times ۳} = ۴\sqrt{۳}$$

$$\frac{\sqrt{۳} + ۳\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} - ۵\sqrt{۳}}{\square + ۴\sqrt{۳} + ۵\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{\square + ۹\sqrt{۳}} = ۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{۳} = \square + ۹\sqrt{۳} \Rightarrow \square = -۸\sqrt{۳} = -\sqrt{۱۹۲}$$

۸ گزینه ۳

$$\frac{\sqrt[۳]{۵۱۲ \times ۱۰^{-۳}} \times \sqrt{۳۲ \times ۱۰^{-۶}}}{\sqrt{۸ \times ۱۰^{۱۲}}} = \frac{\sqrt[۳]{۸^۳ \times ۱۰^{-۳}} \times \sqrt{۲۵ \times ۱۰^{-۶}}}{\sqrt{۲^۳ \times ۱۰^{۱۲}}}$$

$$= \frac{۸ \times ۱۰^{-۱} \times ۴\sqrt{۲} \times ۱۰^{-۳}}{۲\sqrt{۲} \times ۱۰^۶} = ۱۶ \times ۱۰^{-۴} \times ۱۰^{-۶} = ۱۶ \times ۱۰^{-۱۰} = ۱/۶ \times ۱۰^{-۹}$$

۹ گزینه ۴

$$۰/۹۰۹ = ۹/۰۹ \times ۱۰^{-۱}$$

۱۰ گزینه ۲

ابتدا عبارت داخل پرانتز را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^{-3}\times y^{2}\times\left(\frac{x}{y}\right)^{3}\times x}{x^{3}\times y^{4}\times\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}\times y^{-1}}=\frac{y^{2}\times\left(\frac{x}{y}\right)^{3}\times x\times\left(\frac{x}{y}\right)^{2}\times y}{x^{3}\times x^{3}\times y^{4}}$$

$$=\frac{y^{3}x\times\left(\frac{x}{y}\right)^{5}}{x^{6}y^{4}}=\frac{y^{3}x\frac{x^{5}}{y^{5}}}{x^{6}y^{4}}=\frac{\frac{x^{6}}{y^{2}}}{x^{6}y^{4}}=\frac{x^{6}}{x^{6}y^{4}\times y^{2}}=\frac{1}{y^{6}}$$

$$\Rightarrow A=\left(\left(\frac{1}{y^{6}}\right)^{-2}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{y^{6}}\right)^{4}=\frac{1}{y^{24}}\xrightarrow{\text{معکوس}}y^{24}$$

۱۱ گزینه ۳

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{2019}}=\frac{2^{2018}+2^{2017}+\ldots+1}{2^{2019}}=\frac{2^{2018}+2^{2017}+\ldots+2+1+1-1}{2^{2019}}$$

$$=\frac{(2^{2018}+2^{2017}+\ldots+2+1+1)-1}{2^{2019}}=\frac{(2^{2018}+2^{2017}+\ldots+2+2)-1}{2^{2019}}=\frac{(2^{2018}+2^{2017}+\ldots+2^{2}+2^{2})-1}{2^{2019}}=\frac{2^{2019}-1}{2^{2019}}$$

۱۲ گزینه ۳

$2^{10}\times 5/3$ نماد علمی نمی‌باشد.

نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به‌صورت $a\times 10^{n}$ است که در آن $1\leq a<10$ و n عددی صحیح است.

۱۳ گزینه ۲

$$\frac{4^{15}+2^{30}}{27^{10}+243^{6}+9^{15}}=\frac{(2^{2})^{15}+2^{30}}{(3^{3})^{10}+(3^{5})^{6}+(3^{2})^{15}}$$

$$=\frac{2^{30}+2^{30}}{3^{30}+3^{30}+3^{30}}=\frac{2\times 2^{30}}{3\times 3^{30}}=\frac{2^{31}}{3^{31}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{31}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-31}$$

۱۴ گزینه ۴

عدد حقیقی $m=\sqrt{-x^{۲}y^{۳}z^{۵}} \Rightarrow -x^{۲}y^{۳}z^{۵}>۰ \Rightarrow x^{۲}y^{۳}z^{۵}<۰$

$$\left.\begin{array}{l} x^{۲}>۰ \\ x^{۲}y^{۳}z^{۵}<۰ \end{array}\right\} \Rightarrow y^{۳}z^{۵}<۰ \Rightarrow \underbrace{(y^{۲}z^{۴})}_{+}yz<۰ \Rightarrow z,y \text{ مختلف‌العلامت}$$

گزینهٔ ۱:

$y^{۳}z^{۵}<۰ \Rightarrow$ غیرقابل‌قبول

گزینهٔ ۲:

$m=|z|\sqrt{-x^{۲}y^{۳}z^{۳}} \Rightarrow$ معلوم نیست که z مثبت باشد

گزینهٔ ۳:

$m=|xy|\sqrt{-yz^{۵}} \Rightarrow$ معلوم نیست که x,y هم‌علامت باشند

گزینهٔ ۴:

$m=|yz|\sqrt{-x^{۲}yz^{۳}} \Rightarrow yz<۰$ چون $\Rightarrow m=-yz\sqrt{-x^{۲}yz^{۳}}>۰$

۱۵ گزینه ۱

$$\frac{۵^{۷}-۵^{۸}+۵^{۹}-۵^{۱۰}+\ldots-۵^{۲۰}}{-۱+۵-۵^{۲}+\ldots+۵^{۱۳}}=\frac{-۵^{۷}(-۱+۵-۵^{۲}+۵^{۳}-\ldots+۱۵^{۱۳})}{(-۱+۵-۵^{۲}+۵^{۳}-\ldots+۵^{۱۳})}=-۵^{۷}$$

۱۶ گزینه ۱

$$\frac{۲^{۶۰}+۲^{۶۰}+۲^{۶۰}+۲^{۶۰}}{۵\times ۴^{۳۱}-۴^{۳۲}}=\frac{۴\times ۲^{۶۰}}{۴^{۳۱}(۵-۴)}=\frac{۲^{۶۲}}{۲^{۶۲}}=۱$$

۱۷ گزینه ۳

هر عددی غیر از صفر به توان صفر، برابر با ۱ خواهد بود، پس: $|b+c|+|c-d|=۰$

چون جمع دو عدد غیرمنفی صفر شده است، هر دو باید صفر باشند:

$$\begin{cases} |b+c|=۰ \Rightarrow b+c=۰ \Rightarrow b=-c \\ |c-d|=۰ \Rightarrow c=d \end{cases} \Rightarrow F=\overbrace{b+c}^{۰}+d=d=c=-b$$

۱۸ گزینه ۱

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-۴}=\left(\frac{y}{x}\right)^{۴} \quad \text{و} \quad \left(\frac{y}{x}\right)^{-۶}=\left(\frac{x}{y}\right)^{۶}$$

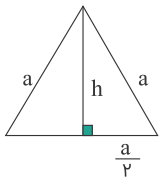
$$x^{-۴}=\frac{۱}{x^{۴}} \quad \text{و} \quad y^{-۶}=\frac{۱}{y^{۶}}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{-۴}\times\left(\frac{y}{x}\right)^{-۶}}{x^{-۴}\times y^{-۶}}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{۴}\times\left(\frac{x}{y}\right)^{۶}}{\frac{۱}{x^{۴}}\times\frac{۱}{y^{۶}}}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{۴}\times\left(\frac{x}{y}\right)^{۴}\times\left(\frac{x}{y}\right)^{۲}}{\frac{۱}{x^{۴}\times y^{۶}}}=\frac{\left(\frac{y}{x}\times\frac{x}{y}\right)^{۴}\times\left(\frac{x}{y}\right)^{۲}}{\frac{۱}{x^{۴}y^{۶}}}$$

$$=۱\times\frac{x^{۲}}{y^{۲}}\times x^{۴}y^{۶}=x^{۲}\times x^{۴}\times y^{۴}=x^{۶}\times y^{۴}=(xy)^{۴}x^{۲}$$

۱۹ گزینه ۱

در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع و میانه و نیمساز یکی است. طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث متساوی‌الاضلاع زیر داریم:



$$h^۲ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ = a^۲ \Rightarrow h = \sqrt{a^۲ - \frac{a^۲}{۴}} = \sqrt{\frac{۳a^۲}{۴}} = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

پس در این مسئله طول ارتفاع به میلی‌متر برابر است با:

$$۱۲۰۰۰۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳} \times ۱۰^۴ \simeq ۱۰/۳۸ \times ۱۰^۴ = ۱/۰۳۸ \times ۱۰^۵ = a \times ۱۰^b$$

$$\Rightarrow a = ۱/۰۳۸\,,\ b = ۵ \Rightarrow a + b = ۱/۰۳۸ + ۵ = ۶/۰۳۸$$

۲۰ گزینه ۲

$$\sqrt{۲} - \sqrt{۲}|۱ - \sqrt{۲}| - |\sqrt{۲} - ۲| = \sqrt{۲} - \sqrt{۲}(\sqrt{۲} - ۱) - (۲ - \sqrt{۲}) = \sqrt{۲} - ۲ + \sqrt{۲} - ۲ + \sqrt{۲} = ۳\sqrt{۲} - ۴$$

۲۱ گزینه ۳

$$(\sqrt{۲} + \sqrt{۸} + \sqrt{۳۲})^۴ = (\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۲})^۴ = (۷\sqrt{۲})^۴$$

$$= ۷^۴ \times ۴ = ۴۹^۲ \times ۴ = ۲۴۰۱ \times ۴ = ۹۶۰۴$$

۲۲ گزینه ۱

طبق فرض $۰ < a < b < ۱$ است، پس:

$$ab < ۱ \Rightarrow ab - ۱ < ۰ \Rightarrow \sqrt{(ab-۱)^۲} = |ab - ۱| = ۱ - ab$$

$$a + b < ۲ \Rightarrow a + b - ۲ < ۰ \Rightarrow \sqrt{(a+b-۲)^۲} = |a + b - ۲| = ۲ - a - b$$

$$\sqrt[۳]{(ab)^۳} = ab$$

$$\Rightarrow C = ۱ - ab + ۲ - a - b + ab = ۳ - a - b$$

۲۳ گزینه ۴

شکل صحیح گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ ۱ : $۳/۰۶ \times ۱۰^{-۶} = ۰/۰۰۰۰۰۳۰۶$

گزینهٔ ۲ : $۴/۳ \times ۱۰^۷ = ۴۳۰۰۰۰۰۰$

گزینهٔ ۳ : $۶/۳۵۸ \times ۱۰^۴ = ۶۳۵۸۰$

۲۴ گزینه ۳

ابتدا اعداد در گزینه‌ها را تجزیه می‌کنیم.

گزینهٔ ۱: $۶^{۱۸} = ۲^{۱۸} \times ۳^{۱۸}$

گزینهٔ ۲: $۲ \times ۶^{۱۴} = ۲^{۱۵} \times ۳^{۱۴}$

گزینهٔ ۳: $۱۶ \times ۶^{۱۳} = ۲^{۴} \times ۲^{۱۳} \times ۳^{۱۳} = ۲^{۱۷} \times ۳^{۱۳}$

گزینهٔ ۴: $۹ \times ۶^{۱۵} = ۳^{۲} \times ۲^{۱۵} \times ۳^{۱۵} = ۲^{۱۵} \times ۳^{۱۷}$

سپس جدول الگوسازی مربوط به تعداد افزایش جمعیت باکتری‌ها را ایجاد می‌کنیم.

تعداد افزایش جمعیت باکتری‌ها	۱۸ برابر	۱۲ برابر
$۱۲^{۱۰} \times ۱۸^{۰} = ۲^{۲۰} \times ۳^{۱۰}$	۰	۱۰
$۱۲^{۹} \times ۱۸^{۱} = ۲^{۱۸} \times ۳^{۹} \times ۲^{۱} \times ۳^{۲} = ۲^{۱۹} \times ۳^{۱۱}$	۱	۹
$۱۲^{۸} \times ۱۸^{۲} = ۲^{۱۶} \times ۳^{۸} \times ۲^{۲} \times ۳^{۴} = ۲^{۱۸} \times ۳^{۱۲}$	۲	۸
$۱۲^{۷} \times ۱۸^{۳} = ۲^{۱۴} \times ۳^{۷} \times ۲^{۳} \times ۳^{۶} = ۲^{۱۷} \times ۳^{۱۳}$	۳	۷

مطابق گزینه ۳ است، پس این حالت امکان‌پذیر است.

۲۵ گزینه ۳

$$۳^{x} = \frac{۱}{۹} \Rightarrow ۳^{x} = \frac{۱}{۳^{۲}} \Rightarrow ۳^{x} = ۳^{-۲} \Rightarrow x = -۲$$

$$-۲ + ۲^{-x} \times ۳^{x} = ۲^{-x} \times ۳^{x} - ۲ = ۲^{۲} \times ۳^{-۲} - ۲$$
$$= ۴ \times \frac{۱}{۹} - ۲ = \frac{۴}{۹} - ۲ = \frac{۴}{۹} - \frac{۱۸}{۹} = -\frac{۱۴}{۹}$$

۲۶ گزینه ۲

ابتدا صورت را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{۶۳} - \sqrt{۲} - \sqrt{۸} = \sqrt{۹ \times ۷} - \sqrt{۲} - \sqrt{۴ \times ۲} = ۳\sqrt{۷} - \sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲}$$
$$= ۳\sqrt{۷} - ۳\sqrt{۲} = ۳(\sqrt{۷} - \sqrt{۲})$$

حال مخرج را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{۲۸} + \sqrt{۱۸} - \sqrt{۵۰} = \sqrt{۴ \times ۷} + \sqrt{۹ \times ۲} - \sqrt{۲۵ \times ۲} = ۲\sqrt{۷} + ۳\sqrt{۲} - ۵\sqrt{۲}$$
$$= ۲\sqrt{۷} - ۲\sqrt{۲} = ۲(\sqrt{۷} - \sqrt{۲})$$
$$\Rightarrow H = \frac{۳(\sqrt{۷} - \sqrt{۲})}{۲(\sqrt{۷} - \sqrt{۲})} = \frac{۳}{۲}$$

۲۷ گزینه ۴

$$۰/۰۰۰۰۰۱۰۱۱۱۰۰۰ = ۱/۰۱۱۱ \times ۱۰^{-۶}$$

۲۸ گزینه ۳

$$۳۶/۱ \times ۱۰^{-۴} \times ۲۰/۰۱ \times ۱۰^{۷} = ۳۶/۱ \times ۲۰/۰۱ \times ۱۰^{۳} = ۷۲۲/۳۶۱ \times ۱۰^{۳}$$
$$= ۷/۲۲۳۶۱ \times ۱۰^{۲} \times ۱۰^{۳} = ۷/۲۲۳۶۱ \times ۱۰^{۵}$$

۲۹ گزینه ۱

$$\frac{(\sqrt{۶}-\sqrt{۳})(\sqrt{۲}+۱)}{\sqrt{۲۷}}-\left(-(\sqrt{۲})^{-۱}\right)^{۲}=\frac{\sqrt{۳}\overbrace{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)}^{\text{مزدوج}}}{۳\sqrt{۳}}-\left(+(\sqrt{۲})^{-۲}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{۳}(۲-۱)}{۳\sqrt{۳}}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۶}$$

۳۰ گزینه ۴

$$\sqrt[۳]{x}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow x=(\frac{۵}{۴})^{۳}=\frac{۱۲۵}{۶۴}\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{\frac{۱۲۵}{۶۴}}=\frac{۵\sqrt{۵}}{۸}$$

۳۱ گزینه ۳

$$\frac{۲\sqrt[۳]{۴۸}\times۳\sqrt[۳]{۱۶۲}}{۵\sqrt[۳]{۳۶}}=\frac{۶\sqrt[۳]{۴۸\times۱۶۲}}{۵\sqrt[۳]{۳۶}}=۱/۲\sqrt[۳]{\frac{۴۸\times۱۶۲}{۳۶}}$$

$$\sqrt[۳]{\frac{۳\times۲^{۴}\times۲\times۳^{۴}}{۲^{۲}\times۳^{۲}}}=\sqrt[۳]{۲^{۳}\times۳^{۳}}=۲\times۳=۶\Rightarrow۱/۲\times۶=۷/۲$$

۳۲ گزینه ۴

می‌دانیم که $(a^{m})^{n}=a^{mn}$ است؛ بنابراین:

گزینهٔ ۱ : $(۶۴)^{۲}=(۲^{۶})^{۲}=۲^{۶\times۲}=۲^{۱۲}$

گزینهٔ ۲ : $(۹)^{۳}=(۳^{۲})^{۳}=۳^{۲\times۳}=۳^{۶}$

گزینهٔ ۳ : $(۴)^{۵}=(۲^{۲})^{۵}=۲^{۲\times۵}=۲^{۱۰}$

گزینهٔ ۴ : $(۲۷)^{۴}=(۳^{۳})^{۴}=۳^{۳\times۴}=۳^{۱۲}$

اولاً که $۲^{۱۰}<۲^{۱۲}$ و $۳^{۶}<۳^{۱۲}$ است؛ همچنین واضح است که $۳>۲\Rightarrow۳^{۱۲}>۲^{۱۲}$، پس $۳^{۱۲}$ بزرگ‌ترین عدد از بین اعداد گزینه‌ها است، یعنی $۲۷^{۴}$.

۳۳ گزینه ۱

$$A=\sqrt{۲۰}(\frac{۱}{۹-۴\sqrt{۵}}-\frac{۱}{۹+۴\sqrt{۵}})=\sqrt{۲۰}(\frac{(۹+۴\sqrt{۵})-(۹-۴\sqrt{۵})}{(۹-۴\sqrt{۵})(۹+۴\sqrt{۵})})$$

$$(۹+۴\sqrt{۵})-(۹-۴\sqrt{۵})=۴\sqrt{۵}+۴\sqrt{۵}=۸\sqrt{۵}$$

$$\left(۹-۴\sqrt{۵}\right)\left(۹+۴\sqrt{۵}\right)=(۹\times۹)+\left(۹\times۴\sqrt{۵}\right)-\left(۴\sqrt{۵}\times۹\right)-\left(۴\sqrt{۵}\times۴\sqrt{۵}\right)$$

$$=۸۱-۱۶\times۵=۸۱-۸۰=۱$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{۲۰}(\frac{۸\sqrt{۵}}{۱})=۲\sqrt{۵}\times۸\sqrt{۵}=۸۰$$

۳۴ گزینه ۲

طول اتاق برابر است با:

$$\sqrt{۱۲}+\sqrt{۲۷}=\sqrt{۴\times۳}+\sqrt{۹\times۳}=۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۳}=۵\sqrt{۳}$$

پس اگر عرض این مستطیل را a در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$۱۵=۵\sqrt{۳}\times a\Rightarrow a=\frac{۱۵}{۵\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۵\times۳}=\sqrt{۳}$$

۳۵ گزینه ۲

اگر حاصل یک عبارت توان‌دار مساوی ۱ باشد، سه حالت ممکن است اتفاق بیافتد:

الف: توان صفر باشد:

$$x+۴=۰\Rightarrow x=-۴$$

ب: پایه مساوی ۱ باشد:

$$x-۳=۱\Rightarrow x=۴$$

ج: پایه ۱− و توان زوج باشد:

$$x-۳=+۱\Rightarrow x=۲$$

$$-۴+۴+۲=۲$$

۳۶ گزینه ۲

$$۲۵^{m-۲}+۲۵^{m-۲}+۲۵^{m-۲}+۲۵^{m-۲}=۱۲۵^{-\frac{۴k}{۳}}+۱۲۵^{-\frac{۴k}{۳}}+۱۲۵^{-\frac{۴k}{۳}}+۱۲۵^{-\frac{۴k}{۳}}$$

$$۴\times۲۵^{m-۲}=۴\times۱۲۵^{-\frac{۴k}{۳}}\Rightarrow۲۵^{m-۲}=۱۲۵^{-\frac{۴k}{۳}}$$

$$\Rightarrow۵^{۲m-۴}=۵^{-۴k}\Rightarrow۲m-۴=-۴k\Rightarrow k=\frac{۲m-۴}{-۴}\Rightarrow k=\frac{۴-۲m}{۴}=\frac{۲-m}{۲}$$

۳۷ گزینه ۲

$$A\times B=(۷/۲\times۱۰^{-۵})\times(۴/۵\times۱۰^{۸})$$

$$=(۷/۲\times۴/۵)\times(۱۰^{-۵}\times۱۰^{۸})=۳۲/۴\times۱۰^{۳}$$

$$=(۳/۲۴\times۱۰)\times۱۰^{۳}=۳/۲۴\times۱۰^{۴}$$

۳۸ گزینه ۳

برای مقایسهٔ راحت‌تر همهٔ گزینه‌ها را به‌صورت نماد علمی می‌نویسیم:

گزینهٔ ۱ : $۳۴۷ \times ۱۰^{-n} = ۳/۴۷ \times ۱۰^{+۲} \times ۱۰^{-n} = ۳/۴۷ \times ۱۰^{-n+۲}$

گزینهٔ ۲ : $۳/۴۷ \times ۱۰^{-n+۲}$

گزینهٔ ۳ : $۳۴/۷ \times ۱۰^{-n-۱} = ۳/۴۷ \times ۱۰^{۱} \times ۱۰^{-n-۱} = ۳/۴۷ \times ۱۰^{-n}$

گزینهٔ ۴ : $۳۴۷ \times ۱۰^{-n+۱} = ۳/۴۷ \times ۱۰^{۲} \times ۱۰^{-n+۱} = ۳/۴۷ \times ۱۰^{-n+۳}$

حاصل گزینهٔ "۱" و گزینهٔ "۲" یکسان است. داریم:

$$۳/۴۷ \times ۱۰^{-n} < ۳/۴۷ \times ۱۰^{-n+۲} < ۳/۴۷ \times ۱۰^{-n+۳}$$

بنابراین عدد گزینهٔ "۳" از بقیه کوچک‌تر است.

۳۹ گزینه ۲

$$۲\sqrt{۱۲} + ۶\sqrt{۳} - ۱۰\sqrt{۷۵} + \frac{۳}{۴}\sqrt{۴۸} = ۲ \times \sqrt{۲^{۲} \times ۳} + ۶\sqrt{۳} - ۱۰\sqrt{۵^{۲} \times ۳} + \frac{۳}{۴} \times \sqrt{۲^{۴} \times ۳}$$
$$= ۴\sqrt{۳} + ۶\sqrt{۳} - ۵۰\sqrt{۳} + ۳\sqrt{۳} = ۱۳\sqrt{۳} - ۵۰\sqrt{۳} = -۳۷\sqrt{۳}$$

۴۰ گزینه ۳

$$\sqrt{۵۰} = \sqrt{۲۵ \times ۲} = ۵\sqrt{۲}$$
$$\sqrt{۹۸} = \sqrt{۴۹ \times ۲} = ۷\sqrt{۲}$$
$$\sqrt{۱۲۵} = \sqrt{۲۵ \times ۵} = ۵\sqrt{۵}$$
$$\sqrt{۴۸} = \sqrt{۱۶ \times ۳} = ۴\sqrt{۳}$$
$$\sqrt{۸۰} = \sqrt{۱۶ \times ۵} = ۴\sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow ۵\sqrt{۲} + ۲(۷\sqrt{۲}) - ۵\sqrt{۵} + ۳(۴\sqrt{۳}) - ۴\sqrt{۵}$$
$$= ۵\sqrt{۲} + ۱۴\sqrt{۲} - ۵\sqrt{۵} + ۱۲\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۵} = ۱۹\sqrt{۲} - ۹\sqrt{۵} + ۱۲\sqrt{۳}$$

۴۱ گزینه ۲

هر متر، ۱۰۰ سانتی‌متر است؛ بنابراین طول ضلع مربع برابر است با:

$$a = \frac{۲۴ \times ۱۰^{-۵}}{۱۰۰} = ۲/۴ \times ۱۰^{-۶} \text{ (متر)}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با:

$$S = a^{۲} = ۵/۷۶ \times ۱۰^{-۱۲} \text{ (متر مربع)}$$

۴۲ گزینه ۳

$$\sqrt{\sqrt{a-۱}} = ۳ \Rightarrow \sqrt{a-۱} = ۹ \Rightarrow a - ۱ = ۸۱ \Rightarrow a = ۸۲$$
$$\sqrt[۳]{\frac{a-b}{۳}} = ۳ \Rightarrow \frac{a-b}{۳} = ۲۷ \Rightarrow a - b = ۸۱ \Rightarrow ۸۲ - b = ۸۱ \Rightarrow b = ۱$$
$$\sqrt{\frac{a}{۲} - ۵b} = \sqrt{\frac{۸۲}{۲} - ۵} = \sqrt{۴۱ - ۵} = \sqrt{۳۶} = ۶$$

۴۳ گزینه ۳

با ساده‌سازی داریم:

$$\frac{(۸\times۲۵)^x\times(۹\times۵)^y}{۳^۲\times۲^۲\times۵^۲}=\frac{۲^{۳x}\times۵^{۲x}\times۳^{۲y}\times۵^y}{۳^۲\times۲^۲\times۵^۲}=۲^۴\times۳^۲\times۵^z$$

$$\Rightarrow ۲^{(۳x-۲)}\times۳^{(۲y-۲)}\times۵^{(۲x+y-۲)}=۲^۴\times۳^۲\times۵^z$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳x-۲=۴\Rightarrow x=۲\\ ۲y-۲=۲\Rightarrow y=۲\\ z=۲x+y-۲=۴+۲-۲=۴\end{cases}\Rightarrow D=x+y+z=۲+۲+۴=۸$$

۴۴ گزینه ۲

با ساده‌سازی عبارت داریم:

$$x\times y^{-۱}=\frac{x}{y}\Rightarrow\left(\frac{-۱}{x\times y^{-۱}}\right)^{-۲}=\left(\frac{-y}{x}\right)^{-۲}=\left(\frac{۱}{\frac{-y}{x}}\right)^۲=\left(\frac{x}{-y}\right)^۲=\frac{x^۲}{y^۲}$$

۴۵ گزینه ۴

$$A=\frac{۰/۰۰۵\times۴\times۱۰^{-۲}\times۱۰/۲۴\times۱۰^۵}{۲۰\times۱۰^{-۵}\times۰/۰۲۵۶\times۵}=\frac{۵\times۱۰^{-۳}\times۴\times۱۰^{-۲}\times۱۰۲۴\times۱۰^{-۲}\times۱۰^۵}{۲۰\times۱۰^{-۵}\times۲۵۶\times۱۰^{-۴}\times۵}$$

$$=\frac{۲۰\times۱۰^{-۲}\times۲^{۱۰}}{۲۰\times۲^۸\times۱۰^{-۹}\times۵}=\frac{۱۰^{-۲}\times۲^{۱۰}}{۲^۷\times۲\times۵\times۱۰^{-۹}}=\frac{۱۰^{-۲}\times۲^۳}{۱۰\times۱۰^{-۹}}$$

$$=\frac{۱۰^{-۲}\times۲^۳}{۱۰^{-۸}}=۱۰^{-۲}\times۱۰^۸\times۲^۳=۱۰^۶\times۲^۳=۸\times۱۰^۶=a\times۱۰^b$$

$$\Rightarrow a=۸,\ b=۶\Rightarrow a\times b=۸\times۶=۴۸$$

۴۶ گزینه ۴

$$\frac{۷}{۸}\times۱۰^{-۷}=۰/۸۷۵\times۱۰^{-۷}=۸/۷۵\times۱۰^{-۸}=۰/۰۰۰۰۰۰۰۸۷۵$$

$$۸۷۵۰\times۱۰^{-۱۰}=۸/۷۵\times۱۰^۳\times۱۰^{-۱۰}=۸/۷۵\times۱۰^{-۷}$$

۴۷ گزینه ۳

$$۳^{y+۲}\times۴^{۲x-۱}=۹۶\Rightarrow۳^{y+۲}\times\left(۲^۲\right)^{۲x-۱}=۲^۵\times۳\Rightarrow۳^{y+۲}\times۲^{۴x-۲}=۲^۵\times۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳^{y+۲}=۳^۱\Rightarrow y+۲=۱\Rightarrow y=-۱\\ ۲^{۴x-۲}=۲^۵\Rightarrow۴x-۲=۵\Rightarrow x=\frac{۷}{۴}\end{cases}$$

$$\frac{۹}{۴}(x+y)^{-۱}=\frac{۹}{۴}\times(\frac{۷}{۴}-۱)^{-۱}=\frac{۹}{۴}\times(\frac{۳}{۴})^{-۱}=\frac{۹}{۴}\times\frac{۴}{۳}=۳$$

۴۸ گزینه ۱

کوچک‌ترین عدد سرور موردنیاز برابر است با ۳۲۵۲۳۴۵۲ که هم عدد ۳۲۵۴۵ و هم عدد ۵۲۳۴۵۲ به‌ترتیب ارقام در آن دیده می‌شود. عدد ۳۲۵۲۳۴۵۲ تقریباً برابر است با ۳۲۰۰۰۰۰۰ که نماد علمی آن مساوی $۳/۲\times۱۰^۷$ است؛ بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۴۹ گزینه ۲

$$(\frac{-۳b}{a^۳})^۲ = \frac{۹b^۲}{a^۶} \ , \ (\frac{a^۲}{a^{-۲}b})^۲ = (\frac{a^۲ \times a^۲}{b})^۲ = \frac{a^۸}{b^۲}$$

$$(-\frac{۱}{۳}b^۲)^{-۱} = \frac{-۳}{b^۲} \Rightarrow A = \frac{۹b^۲}{a^۶} \times \frac{a^۸}{b^۲} \times \frac{-۳}{b^۲} = \frac{-۲۷a^۲}{b^۲} = -۲۷(\frac{a}{b})^۲$$

۵۰ گزینه ۳

نکته: مساحت شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع a برابر است با: $S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$

بنابر نکتهٔ فوق در مورد گزینهٔ (۳) داریم:

$$\left.\begin{matrix} S_{a+b} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(a+b)^۲ \\ S_{a-b} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(a-b)^۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{a+b} + S_{a-b} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}((a+b)^۲ + (a-b)^۲)$$

$$= \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(a^۲ + b^۲ \cancel{+۲ab} + a^۲ + b^۲ \cancel{-۲ab}) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(۲a^۲ + ۲b^۲) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \times ۲a^۲ + \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \times ۲b^۲$$

$$= \underbrace{۲(\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲)}_{S_a} + \underbrace{۲(\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}b^۲)}_{S_b} = ۲S_a + ۲S_b$$

۵۱ گزینه ۲

$$۰/۰۰۰۵ = ۵ \times ۱۰^{-۴}$$
$$۵/۲ \times ۱۰^{\square} > ۵ \times ۱۰^{-۴}$$

هریک از اعداد (-۴)، (-۳)، (-۲)، (-۱)، (صفر) و (۱) را می‌توان در مربع قرار داد، یعنی شش عدد.

۵۲ گزینه ۲

$$A = ۰/۰۰۳۴ \times ۱۰^{-۲} \times ۱۵ \times ۱۰^{۱۵} = ۳۴ \times ۱۰^{-۴} \times ۱۰^{-۲} \times ۱۵ \times ۱۰^{۱۵}$$
$$= ۵۱۰ \times ۱۰^{-۶} \times ۱۰^{۱۵} = ۵۱۰ \times ۱۰^{۹} = ۵/۱ \times ۱۰^{۲} \times ۱۰^{۹} = ۵/۱ \times ۱۰^{۱۱}$$

۵۳ گزینه ۱

با ساده‌سازی داریم:

$$\sqrt[۳]{\frac{۶۴}{۱۲۵}} = \sqrt[۳]{\frac{۴^۳}{۵^۳}} = \sqrt[۳]{(\frac{۴}{۵})^۳} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

۵۴ گزینه ۲

$$۲^{a+۱}=۳\Rightarrow ۲^{a}\times ۲=۳\Rightarrow ۲^{a}=\frac{۳}{۲}$$

$$۸^{۲a+۱}=(۲^{۳})^{۲a+۱}=۲^{۶a+۳}$$

$$=۲^{۶a}\times ۲^{۳}=(۲^{a})^{۶}\times ۸=(\frac{۳}{۲})^{۶}\times ۸=\frac{۳^{۶}}{۲^{۶}}\times ۸\Rightarrow B=\frac{۸^{۲a+۱}}{۸۱}=\frac{۳^{۶}\times ۸}{۲^{۶}\times ۸۱}$$

$$=\frac{۳^{۶}\times ۲^{۳}}{۲^{۶}\times ۳^{۴}}=\frac{۳^{۲}}{۲^{۳}}=\frac{۹}{۸}$$

۵۵ گزینه ۳

$$۱۶^{x+۲}=۱۰\Rightarrow (۲^{۴})^{x+۲}=۱۰\Rightarrow ۲^{۴x+۸}=۱۰$$

$$\sqrt{۴^{۴x+۸}+۲^{۴x+۹}+۲^{(۲^{۴x+۸}-۱۰)}}=\sqrt{(۲^{۲})^{۴x+۸}+۲^{۴x+۸+۱}+۲^{(۱۰-۱۰)}}$$

$$=\sqrt{(\underbrace{۲^{۴x+۸}}_{۱۰})^{۲}+\underbrace{۲^{۴x+۸}}_{۱۰}\times ۲^{۱}+۲^{۰}}=\sqrt{۱۰^{۲}+۱۰\times ۲+۱}=\sqrt{۱۲۱}=۱۱$$

۵۶ گزینه ۴

$$\left(\sqrt{۲}\right)^{-۴}\times (۲-۲^{-۲})^{-۱}\div ۲^{-۳}=\frac{۱}{(\sqrt{۲})^{۴}}\times \left(۲-\frac{۱}{۲^{۲}}\right)^{-۱}\div ۲^{-۳}$$

$$=\frac{۱}{۴}\times \left(۲-\frac{۱}{۴}\right)^{-۱}\div ۲^{-۳}=\frac{۱}{۴}\times \left(\frac{۷}{۴}\right)^{-۱}\div \frac{۱}{۲^{۳}}=\frac{۱}{۴}\times \frac{۴}{۷}\div \frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۷}\times \frac{۸}{۱}=\frac{۸}{۷}$$

۵۷ گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^{۲}}=|۱-\sqrt{۳}|\\ ۱<\sqrt{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{(۱-\sqrt{۳})^{۲}}=\sqrt{۳}-۱$$

$$\sqrt{۱۲}=\sqrt{۴\times ۳}=\sqrt{۴}\times \sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{(۳+\sqrt{۱۲})^{۲}}=|۳+۲\sqrt{۳}|=۳+۲\sqrt{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(۶-\sqrt{۸})^{۲}}=|۶-\sqrt{۸}|\\ ۶>\sqrt{۸}\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{(۶-\sqrt{۸})^{۲}}=۶-۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{۲\sqrt{۳}-۲-۳-۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}+۶-۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۱}=۱$$

۵۸ گزینه ۴

$$۲^{۱۲}+۲^{۱۲}=۲\times ۲^{۱۲}=۲^{۱۳}$$

$$\Rightarrow A=\underbrace{۲^{۱۳}+۲^{۱۳}}_{۲\times ۲^{۱۳}}+۲^{۱۴}+۲^{۱۵}=\underbrace{۲^{۱۴}+۲^{۱۴}}_{۲\times ۲^{۱۴}}+۲^{۱۵}$$

$$=۲^{۱۵}+۲^{۱۵}=۲\times ۲^{۱۵}=۲^{۱۶}$$

۵۹ گزینه ۴

$$A \times B = ۴^۸$$

$$\frac{A}{B} = ۲^۸ = ۴^۴ \Rightarrow A = ۴^۴B$$

$$\Rightarrow ۴^۴B \times B = ۴^۸ \Rightarrow ۴^۴ \times B^۲ = ۴^۸$$

$$B^۲ = ۴^۴ \Rightarrow B = ۴^۲ \Rightarrow A = ۴^۶ \Rightarrow \sqrt{A} = \sqrt{۴^۶} = ۲^۶$$

۶۰ گزینه ۴

ابتدا جدول الگویابی مربوط به این سؤال را رسم می‌کنیم:

و درنتیجه با بررسی گزینه‌ها برای گزینهٔ ۴ داریم:

شماره مرحله	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
توپ سیاه	۱	۲×۳	۲×۳	$۲^۲ \times ۳^۲$	$۲^۲ \times ۳^۲$	$۲^۳ \times ۳^۳$	$۲^۳ \times ۳^۳$	$۲^۴ \times ۳^۴$
توپ سفید	۲	۲	$۲^۲ \times ۳$	۲×۳	$۲^۳ \times ۳^۳$	$۲^۳ \times ۳^۳$	$۲^۴ \times ۳^۳$	$۲^۴ \times ۳^۴$

$$\frac{۶^۴}{۳} = \frac{۲^۴ \times ۳^۴}{۳} = ۲^۴ \times ۳^۳$$