۱ گزینه ۱

$$\begin{cases} A = x^3 + x = x(x^2+1) \\ B = yx + \frac{y}{x} = \frac{y}{x}(x^2+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB = x(x^2+1)\frac{y}{x}(x^2+1) = (x)(\frac{y}{x})(x^2+1)^2 = y(x^4+1+2x^2) = yx^4+2yx^2+y$$

۲ گزینه ۳

با ضرب صورت و مخرج طرف اول عبارت گزینهٔ "۳" در $(a-b)$، به طرف دوم آن می‌رسیم:

$$\text{گزینه ۳} : \frac{a+b}{a-b} \times \frac{a-b}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2-2ab}$$

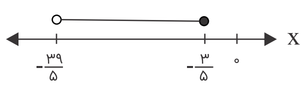
در حالت کلی، سایر گزینه‌ها درست نیستند.

۳ گزینه ۱

طرفین نامعادله‌ها را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم و آن‌ها را جداگانه حل می‌کنیم، پس داریم:

$$\begin{cases} 4(x+1) \le 1-x \\ 1-x < 4(x+10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+4 \le 1-x \\ 1-x < 4x+40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x \le -3 \Rightarrow x \le \frac{-3}{5} \\ -5x < 39 \Rightarrow x > -\frac{39}{5} \end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب نامعادله به‌صورت $\{x \in \mathbb{R} | -\frac{39}{5} < x \le \frac{-3}{5}\}$ خواهد بود.



۴ گزینه ۳

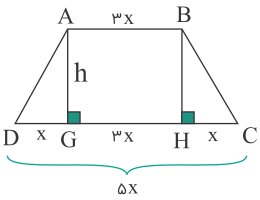
$$x = \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x>0} \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\xrightarrow[\text{۲ می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان}} x + \frac{1}{x} - 2 = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$$

۵ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل، مساحت ذوزنقه برابر است با:



$$(\text{نصف مجموع دو قاعده}) \times (\text{طول ارتفاع}) = \frac{۳x + ۵x}{۲} \times h = ۴x^{۲}$$

$$\Rightarrow ۴x \times h = ۴x^{۲} \Rightarrow h = x$$

پس دو مثلث همنهشت AGD و BHC، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند، پس:

$$\overset{\Delta}{BHC} : \hat{B} = \hat{C} = ۴۵^{\circ}$$
$$\Rightarrow A\hat{B}C = ۹۰^{\circ} + ۴۵^{\circ} = ۱۳۵^{\circ}$$

۶ گزینه ۲

موارد اول، دوم، چهارم و پنجم به ازای همهٔ مقادیر x برقرار هستند که البته می‌توان به‌سادگی با انجام عملیات آن‌ها را ثابت کرد. طبق تعریف به این موارد اتحاد می‌گویند؛ اما مورد سوم به ازای همهٔ مقادیر x برقرار نیست، درنتیجه اتحاد نیست.

۷ گزینه ۲

به توان عدد فرد رساندن دو طرف نامعادله، علامت نامساوی را تغییر نمی‌دهد، اما از گزینه‌های دیگر نمی‌توان مطمئن بود.

۸ گزینه ۳

هر سه عدد می‌توانند همواره مثبت باشند. همچنین ممکن است دو عدد همواره منفی و عدد سوم مثبت باشد، پس چهار حالت داریم:

$$\begin{cases} a > ۰ \,,\; b < ۰ \,,\; c < ۰ \\ a > ۰ \,,\; b > ۰ \,,\; c > ۰ \\ a < ۰ \,,\; b > ۰ \,,\; c < ۰ \\ a < ۰ \,,\; b < ۰ \,,\; c > ۰ \end{cases}$$

۹ گزینه ۱

$$\sqrt{۳۲۰} = \sqrt{۶۴ \times ۵} = ۸\sqrt{۵}$$

$$\sqrt{۶۰۵} = \sqrt{۱۲۱ \times ۵} = ۱۱\sqrt{۵}$$

$$\sqrt{۴۵} = \sqrt{۹ \times ۵} = ۳\sqrt{۵}$$

$$\sqrt{۸۴۵} = \sqrt{۱۶۹ \times ۵} = ۱۳\sqrt{۵}$$

$$\sqrt{۸۰} = \sqrt{۱۶ \times ۵} = ۴\sqrt{۵}$$

عبارت صورت و مخرج عددی مثبت است:

$$\frac{\sqrt{۳۲۰}+\sqrt{۶۰۵}+\sqrt{۴۵}}{\sqrt{۸۴۵}-\sqrt{۸۰}+x} = \frac{۸\sqrt{۵}+۱۱\sqrt{۵}+۳\sqrt{۵}}{۱۳\sqrt{۵}-۴\sqrt{۵}+x} = \frac{۲۲\sqrt{۵}}{۹\sqrt{۵}+x} \Rightarrow \frac{۲۲\sqrt{۵}}{۹\sqrt{۵}+x} > ۱$$

$$\Rightarrow ۲۲\sqrt{۵} > ۹\sqrt{۵}+x \Rightarrow ۲۲\sqrt{۵}-۹\sqrt{۵} > x \Rightarrow ۱۳\sqrt{۵} > x$$

$$\Rightarrow x < \sqrt{۸۴۵} \xrightarrow{\text{مثبت } x} ۰ < x < \sqrt{۸۴۵}$$

۱۰ گزینه ۴

ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & x^۴+x^۲+۱+x(۲x^۲+x+۲) = (x^۴+x^۲+۱)+(۲x^۳+x^۲+۲x) \\ & = (x^۴+x^۲+x^۲+۱-x^۲)+(۲x^۳+x^۲+۲x) \\ & = (x^۴+۲x^۲+۱)-x^۲+۲x^۳+x^۲+۲x = (x^۲+۱)^۲+۲x^۳+۲x = (x^۲+۱)^۲+۲x(x^۲+۱) \\ & = (x^۲+۱)(x^۲+۱+۲x) = (x^۲+۱)(x+۱)^۲ \end{aligned}$$

۱۱ گزینه ۲

$$\left.\begin{aligned} \frac{a+b}{ac} \times \frac{ab}{d} = \frac{ab+b^۲}{cd} \\ \frac{a}{d} \times \frac{a+b}{c} = \frac{a^۲+ab}{dc} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{\frac{ab+b^۲}{cd}}{\frac{ab+a^۲}{dc}} = \frac{ab+b^۲}{ab+a^۲} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{۱}{A} = \frac{a}{b}$$

۱۲ گزینه ۴

ابتدا همهٔ جملات را به یک طرف تساوی می‌بریم و دسته‌بندی می‌کنیم:

$$۲۵a^{۲} + ۲b^{۲} + ۶b + ۹ - ۱۰ab = ۰$$

$$\Rightarrow (۵a)^{۲} + b^{۲} + b^{۲} + (۲ \times ۳)b + ۳^{۲} - (۲ \times ۵)ab = ۰$$

$$\Rightarrow ((۵a)^{۲} - (۲ \times ۵)ab + b^{۲}) + (b^{۲} + (۲ \times ۳)b + ۳^{۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow (۵a - b)^{۲} + (b + ۳)^{۲} = ۰$$

مجموع دو عبارت نامنفی زمانی برابر با صفر است که هر عبارت برابر با صفر باشد:

$$b + ۳ = ۰ \Rightarrow b = -۳$$

$$۵a - b = ۰ \xrightarrow{b=-۳} ۵a - (-۳) = ۰ \Rightarrow ۵a + ۳ = ۰ \Rightarrow ۵a = -۳ \Rightarrow a = \frac{-۳}{۵}$$

درنتیجه داریم:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{(-\frac{۳}{۵})(-۳)} = \sqrt{\frac{۹}{۵}} = \frac{\sqrt{۹}}{\sqrt{۵}} = \frac{۳}{\sqrt{۵}} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$$

۱۳ گزینه ۲

$$x^{۲} + ۹z^{۲} - ۴z^{۲} - y^{۲} + ۶xz + ۴yz = (x^{۲} + ۹z^{۲} + ۶xz) - (y^{۲} + ۴z^{۲} - ۴yz)$$

$$= (x + ۳z)^{۲} - (y - ۲z)^{۲} \xrightarrow{\text{مزدوج}} (x + ۳z + y - ۲z)(x + ۳z - y + ۲z)$$

$$= (x + y + z)(x - y + ۵z)$$

پس گزینهٔ "۲" صحیح است.

۱۴ گزینه ۴

$$x^{۵} + x + ۱ = (x^{۵} + x^{۴} + x^{۳}) - (x^{۴} + x^{۳} + x^{۲}) + (x^{۲} + x + ۱)$$
$$= (x^{۳}(x^{۲} + x + ۱)) - (x^{۲}(x^{۲} + x + ۱)) + (x^{۲} + x + ۱)$$
$$= (x^{۲} + x + ۱)(x^{۳} - x^{۲} + ۱)$$

۱۵ گزینه ۲

$$\frac{۲a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^{۲} = ۲ac$$

$$(a + c + b)(a + c - b) = (a + c)^{۲} - (b)^{۲} = (a + c)^{۲} - ۲ac$$

$$= a^{۲} + c^{۲} + ۲ac - ۲ac = a^{۲} + c^{۲}$$

۱۶ گزینه ۲

$$\frac{۳x-۵}{x+۳}<۱\Rightarrow\frac{۳x-۵}{x+۳}-۱<۰\Rightarrow\frac{۳x-۵-x-۳}{x+۳}<۰\Rightarrow\frac{۲x-۸}{x+۳}<۰$$

عبارت $\frac{۲x-۸}{x+۳}$ تنها در حالتی از صفر کوچک‌تر است که صورت و مخرج ناهم‌علامت باشند که این دو حالت دارد:

در حالت اول، صورت مثبت و مخرج منفی است که این حالت غیرممکن است:

$$\begin{cases}۲x-۸>۰\\x+۳<۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>۴\\x<-۳\end{cases}$$

در حالت دوم، صورت منفی و مخرج مثبت است که این حالت ممکن و پاسخ نامعادله است.

$$\begin{cases}۲x-۸<۰\\x+۳>۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x<۸\\x>-۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x<۴\\x>-۳\end{cases}\Rightarrow -۳<x<۴$$

۱۷ گزینه ۱

$$(x+۲y-z)^۲+(۲x-y+۳z)^۲$$
$$=(x^۲+۴y^۲+z^۲+۴xy-۲xz-۴yz)+(۴x^۲+y^۲+۹z^۲-۴xy+۱۲xz-۶yz)$$
$$=۵x^۲+۵y^۲+۱۰z^۲+۱۰xz-۱۰yz$$

حاصل عبارت پنج‌جمله‌ای است.

۱۸ گزینه ۴

مساحت هر گزینه:

$$\text{گزینهٔ ۱}:\ \frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۲}yx^۲+yx^۲)\times\frac{ay}{x}=\frac{۵}{۴}ay^۲x$$

$$\text{گزینهٔ ۲}:\ \frac{۱}{۲}(ax+bx)\times c=\frac{c(a+b)}{۲}x$$

$$\text{گزینهٔ ۳}:\ \frac{۱}{۲}\times\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}=\frac{۱}{۲}$$

گزینهٔ "۴": این عبارت توان منفی دارد پس یک‌جمله‌ای نیست.

$$xy\times\frac{a}{x^۲}=\frac{ay}{x}=ayx^{-۱}$$

۱۹ گزینه ۳

$$-\frac{۲x-۳}{۵} \le \frac{۱۲x-۳}{۲} \xrightarrow{\times ۱۰} -۲(۲x-۳) \le ۵(۱۲x-۳)$$
$$\Rightarrow -۴x+۶ \le ۶۰x-۱۵ \Rightarrow -۶۴x \le -۲۱ \Rightarrow x \ge \frac{۲۱}{۶۴}$$

مقادیر همهٔ گزینه‌ها بزرگ‌تر از $\frac{۲۱}{۶۴}$ است به‌جز مقدار $\sqrt{۳}-۲$ که منفی است و از $\frac{۲۱}{۶۴}$ کوچک‌تر است.

۲۰ گزینه ۱

$$۵x^{۳}+ax^{b}=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۵ \\ b=۳ \end{cases} \Rightarrow (-۵x^{۲}+۳)^{۲}=۲۵x^{۴}-۳۰x^{۲}+۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=۲۵ \\ f=۹ \\ d=-۳۰ \\ a=-۵ \\ b=۳ \end{cases} \Rightarrow \frac{a+b}{c+f+d}=\frac{-۵+۳}{۲۵+۹-۳۰}=-\frac{۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}$$

۲۱ گزینه ۳

$$a^{۴}-a^{۲}-۷۲=(a^{۲}-۹)(a^{۲}+۸)=(a-۳)(a+۳)(a^{۲}+۸)$$

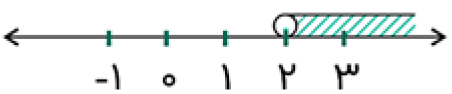
۲۲ گزینه ۴

ابتدا طرفین نامعادله را در ک.م.م مخرج‌ها، یعنی عدد ۱۵ ضرب می‌کنیم.

$$\left(\frac{۲x+۱}{۵}-\frac{۲-x}{۳}>۱\right)\times ۱۵ \Rightarrow ۳(۲x+۱)-۵(۲-x)>۱۵$$

$$۶x+۳-۱۰+۵x>۱۵ \Rightarrow ۱۱x>۲۲ \Rightarrow x>۲$$

یعنی روی محور برابر خواهد شد با:



۲۳ گزینه ۲

اگر $N=۸$ باشد، در تجزیهٔ عدد حاصل، توان همهٔ شمارنده‌ها عددی زوج می‌شود، پس عدد مربع کامل می‌شود.

$$۳\times ۸\times ۱۵\times ۲۴\times ۳۵\times ۴۸\times ۶۳=۲^{۱۰}\times ۳^{۶}\times ۵^{۲}\times ۷^{۲}$$

۲۴

گزینه ۳

$$t^5 = t(t^2)^2 = t(t+1)^2 = t(t^2+1+2t) = t(t+1+1+2t) = t(3t+2) = 3t^2+2t$$
$$= 3(t+1)+2t = 3t+3+2t = 5t+3$$

۲۵

گزینه ۱

عبارت سمت راست را ساده می‌کنیم:

$$(2x^2+5x+3)(x-2) = 2x^3+x^2-7x-6$$

عبارت سمت چپ را ساده می‌کنیم:

$$(x^2-x-a)(bx+3) = bx^3+(3-b)x^2+(-3-ab)x+(-3a)$$

حال داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} bx^3 = 2x^3 \\ (3-b)x^2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow b=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3-ab = -3-2a = -7 \\ -3a = -6 \end{cases} \Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow a+b = 2+2 = 4$$

۲۶

گزینه ۱

$$\frac{A^2-B^2}{C^2} = \frac{(A-B)(A+B)}{C^2} = \frac{(a^2-b^2-(a^2+b^2))\left(a^2-\cancel{b^2}+a^2+\cancel{b^2}\right)}{(ab)^2}$$

$$= \frac{(-2b^2)(2a^2)}{a^2b^2} = \frac{-4\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}} = -4$$

۲۷

گزینه ۱

می‌دانیم:

$$(۱)\quad x+y+z=۳$$
$$(۲)\quad \frac{۱}{۴x}+\frac{۱}{۴y}+\frac{۱}{۴z}=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۴}(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z})=۰$$
$$\Rightarrow \frac{yz+xz+xy}{xyz}=۰ \Rightarrow xy+xz+zy=۰$$

ازطرفی:

$$(x+y+z)^۲=(x+y)^۲+z^۲+۲z(x+y)=x^۲+y^۲+z^۲+۲xy+۲xz+۲yz$$
$$=x^۲+y^۲+z^۲+۲(xy+xz+yz) \Rightarrow (x+y+z)^۲=x^۲+y^۲+z^۲+۲(xy+xz+yz)$$
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۳^۲=x^۲+y^۲+z^۲+۲\times ۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=۹ \Rightarrow \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=۳$$

۲۸

گزینه ۴

$$(a+b)^۲=۴(ab)+۱ \Rightarrow a^۲+b^۲+۲ab=۴ab+۱ \Rightarrow a^۲+b^۲-۲ab=۱$$
$$\Rightarrow (a-b)^۲=۱ \Rightarrow |a-b|=۱$$

۲۹

گزینه ۲

حاصل عبارت زیر همواره نامنفی است:

$$(a+b)^۲-۲ab=a^۲+b^۲+۲ab-۲ab=a^۲+b^۲$$

۳۰

گزینه ۱

$$(x+۱)^۲+(x-۱)^۲=x^۲+۲x+۱+x^۲-۲x+۱=۲(x^۲+۱)$$

طبق نامعادلهٔ صورت سؤال : $۲(x^۲+۱)>۲(x+۱)^۲ \Rightarrow x^۲+۱>x^۲+۱+۲x \Rightarrow ۲x<۰ \Rightarrow x<۰$

۳۱

گزینه ۴

یک‌جمله‌ای باید حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد. در گزینهٔ "۴" داریم: $(\frac{۱}{۲}x^۲)^۲=\frac{۱}{۴}x^۴$

باتوجه‌به تعریف، این گزینه یک‌جمله‌ای است ولی بقیهٔ گزینه‌ها یک‌جمله‌ای نیستند.

۳۲ گزینه ۴

برای اینکه درجهٔ چندجمله‌ای نسبت به y و x برابر ۴ باشد باید عبارت $۵ + (a - ۱)$ برابر ۴ یا کمتر باشد؛ پس:

$$۵ + a - ۱ = ۴ \Rightarrow a = ۰$$

اما اگر $a = ۰$ باشد عبارت $x^۵y^{-۱}$ را خواهیم داشت که باعث می‌شود عبارت چندجمله‌ای نباشد، پس عملاً خواستهٔ صورت سؤال غیرممکن است.

۳۳ گزینه ۲

عبارت $x - y = ۵$ را به توان ۳ می‌رسانیم.

$$(x - y)^۳ = ۵^۳ \Rightarrow x^۳ - ۳x^۲y + ۳xy^۲ - y^۳ = ۱۲۵$$
$$x^۳ - y^۳ - ۳xy(x - y) = ۱۲۵$$
$$x^۳ - y^۳ - ۳(-۶)(۵) = ۱۲۵$$
$$x^۳ - y^۳ = ۱۲۵ - ۹۰ = ۳۵$$

۳۴ گزینه ۳

$$(a - b + c)^۲ = (-(-a + b - c))^۲ = (-(b - a - c))^۲$$

اگر دو عدد قرینهٔ هم به توان ۲ برسند، حاصلشان باهم برابر می‌شود، زیرا وقتی یک عبارت منفی به توان ۲ می‌رسد، علامت آن به مثبت تبدیل می‌شود. به‌طور خلاصه، مجذور یک عدد با مجذور قرینهٔ آن یکسان است. شرح سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱ : $a - (۳ + b) = (a - ۳) - b$

گزینهٔ ۲ : $-(a + b - ۱) = -(a + b) + ۱$

گزینهٔ ۴ : $a(b - c + d) = ab + a(-c + d) = ab - a(c - d)$

۳۵ گزینه ۴

$$(۱)\ \frac{۲x - ۵}{۳} < \frac{۵x - ۲}{۴} \Rightarrow ۸x - ۲۰ < ۱۵x - ۶ \Rightarrow ۷x + ۱۴ > ۰ \Rightarrow x + ۲ > ۰ \Rightarrow x > -۲$$

$$(۲)\ \frac{۱۱x - ۵}{۳} < \frac{۱۳x - ۲}{۶} \Rightarrow ۱۱x - ۵ < \frac{۱۳x - ۲}{۲} \Rightarrow ۲۲x - ۱۰ < ۱۳x - ۲$$

$$\Rightarrow ۹x < ۸ \Rightarrow x < \frac{۸}{۹} \xrightarrow{(۱)\cap(۲)} -۲ < x < \frac{۸}{۹}$$

۳۶ گزینه ۳

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲ = ۱۳۰ + ۲ab = ۲۵۶$$

$$\Rightarrow ۲ab = ۱۲۶ \Rightarrow ab = ۶۳ , ۶۳ = ۶۳ \times ۱ = ۹ \times ۷$$

$$\xrightarrow{\text{a و b یک‌رقمی هستند}} \begin{cases} a = ۹ , b = ۷ \\ a = ۷ , b = ۹ \end{cases} \Rightarrow |a - b| = ۲$$

۳۷ گزینه ۱

"هر عبارت را که به‌صورت حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد، یک‌جمله‌ای می‌نامیم"، ساده‌شدهٔ عبارت گزینهٔ "۱" به‌صورت $۲۴x$ است که یک‌جمله‌ای است.

$$(۳ + ۴x)^۲ + (۳ - ۴x)(۳ + ۴x) - ۱۸ = ۹ + ۲۴x + ۱۶x^۲ + ۹ - ۱۶x^۲ - ۱۸ = ۲۴x$$

در سایر گزینه‌ها:

در گزینهٔ "۲" عبارت زیر رادیکال، منفی است و درنتیجه ضریب متغیر، در مجموعهٔ اعداد حقیقی نیست.

در گزینهٔ "۳" متغیر x زیر رادیکال است.

توان متغیر z نیز در گزینهٔ "۴"، منفی است.

۳۸ گزینه ۱

اتحاد مربع مجموع سه جمله را می‌نویسیم و مقادیر داده‌شده را جایگذاری می‌کنیم.

$$\underbrace{(a+b+c)^۲}_{۸} = \underbrace{a^۲ + b^۲ + c^۲}_{۳۰} + ۲ab + ۲ac + ۲bc$$

$$\Rightarrow ۸^۲ = ۳۰ + ۲(ab + ac + bc)$$

$$ab + ac + bc = \frac{۶۴ - ۳۰}{۲} = \frac{۳۴}{۲} = ۱۷$$

۳۹ گزینه ۳

اگر عبارت داده‌شده مربع کامل باشد، باید به‌صورت $(۲x \pm ۷)^۲$ باشد، پس می‌توان نوشت:

$$۴x^۲ + (۴b - ۱۲)x + ۴۹ = (۲x \pm ۷)^۲$$

$$۴x^۲ + (۴b - ۱۲)x + ۴۹ = ۴x^۲ \pm ۲۸x + ۴۹$$

$$۴b - ۱۲ = \pm ۲۸ \Rightarrow \begin{cases} ۴b = ۴۰ \Rightarrow b = ۱۰ \\ ۴b = -۱۶ \Rightarrow b = -۴ \end{cases}$$

در اینجا $b = ۱۰$ جواب است.

۴۰

گزینه ۴

هر عبارت که به‌صورت حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد، یک‌جمله‌ای است.

بررسی عبارات:

$$\text{گزینهٔ ۱}: \frac{(x+۱)^۲}{x^۲+۲x+۱}\times|y| = \frac{(x+۱)^۲}{(x+۱)^۲}\times|y| = |y|$$

$$\text{گزینهٔ ۲}: \frac{۱}{۳}\times\frac{x^۷}{x^۹}\times\frac{\sqrt{x^۲}}{\sqrt[۳]{x^۹}}\times yz = \frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{x^۲}\times\frac{|x|}{x^۳}\times yz = \frac{۱}{۳}\times\frac{|x|yz}{x^۵}$$

$$\text{گزینهٔ ۳}: \frac{x^{۲۰}}{۷x^{۱۲}\times y^۳} = \frac{۱}{۷}x^۸y^{-۳}$$

$$\text{گزینهٔ ۴}: \frac{۱}{۴}\times\frac{x^۴}{x^{-۲}}\times\frac{۱}{۸}\times\frac{۱}{x}\times\frac{\sqrt{y^۲}}{|y|} = \frac{۱}{۴}\times x^۶\times\frac{۱}{۸}\times\frac{۱}{x}\times\frac{|y|}{|y|} = \frac{۱}{۳۲}\times\frac{x^۶}{x^۱} = \frac{۱}{۳۲}x^۵$$

۴۱

گزینه ۳

$$x^۳+۹x-۳\sqrt{۳}x^۲-۳\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$$
$$=(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^۳+۹(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})-۳\sqrt{۳}(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^۲-۳\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$$
$$=(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})(۲+۳+۲\sqrt{۶})+۹\sqrt{۲}+۹\sqrt{۳}-۶\sqrt{۳}-۹\sqrt{۳}-۶\sqrt{۱۸}-۳\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$$
$$=۲\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}$$

۴۲

گزینه ۴

باتوجه‌به زوایای قائمهٔ شکل، خطوط موازی بین دو خط موازی باهم برابرند؛ بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} DC = x-z \\ AD = \frac{y}{۲}+z \\ AD = BC \\ DC = AB \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مستطیل } ABCD = AD+BC+BA+CD$$
$$= ۲\times(x-z)+۲\times(\frac{y}{۲}+z) = ۲x+y$$

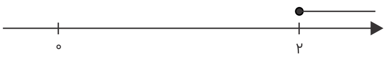
۴۳

گزینه ۴

$$(x^۲-\sqrt{۲})(x^۲+\sqrt{۲})(x^۴+۵)=((x^۲)^۲-(\sqrt{۲})^۲)(x^۴+۵)=(x^۴-۲)(x^۴+۵)=x^۸+۳x^۴-۱۰$$

بنابراین می‌توان با جایگذاری مقدار این عبارت به نامعادلهٔ زیر رسید:

$$x^۸+۳x^۴-۱۰\geq x^۸+۳x^۴-۱۵x+۲۰\Rightarrow ۱۵x\geq ۳۰\Rightarrow x\geq ۲$$



۴۴

گزینه ۴

عبارت گزینهٔ "۴" همواره صادق است، $c^۳-d^۳$ همواره عبارتی مثبت است و $a^۳-b^۳$ همواره منفی است. سایر گزینه‌ها درست نیست.

۴۵

گزینه ۲

فقط عبارت (ج) صحیح است. (اگر $ab>۰$ آنگاه a و b هم‌علامت‌اند.)

الف) $a+b<۰$، مثال نقض: $b=-۳\ ,\ a=۲$

ب) $\frac{ab}{c}>۰$، مثال نقض : $c=۴, b=-۳, a=-۲$

د) $a^۲<b^۲$، مثال نقض : $b=-۳\ ,\ a=۲$

۴۶

گزینه ۲

ضرایب متغیرهای هم‌درجه را پس از ساده کردن عبارت با یکدیگر مساوی قرار می‌دهیم. چون در طرف چپ x نداریم، پس ضریب x را صفر قرار می‌دهیم.

$$۵+c=۷\Rightarrow c=۲$$
$$۲a-۶=۰\Rightarrow a=۳$$
$$a+۲b=-۵\Rightarrow ۳+۲b=-۵\Rightarrow ۲b=-۸\Rightarrow b=-۴$$

$$\Rightarrow a+b+c=۳-۴+۲=۱$$

۴۷

گزینه ۱

$$\begin{cases} a=۳ \\ b=۲ \\ c=\sqrt{۶}\end{cases}\Rightarrow \frac{۳\sqrt{۲a+b}}{c}=\frac{۳\sqrt{۶+۲}}{\sqrt{۶}}=\frac{۳\sqrt{۸}}{\sqrt{۶}}=\frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}\times ۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

۴۸ گزینه ۲

از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$(x+y)^۲-(x-y)^۲=۴xy$$

$$\text{با فرض}: \begin{cases} x=۱۰۰۰۰ \\ y=۲ \end{cases} \Rightarrow (۱۰۰۰۰+۲)^۲-(۱۰۰۰۰-۲)^۲=۴\times ۱۰۰۰۰\times ۲$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰۲)^۲-(۹۹۹۸)^۲=۸۰۰۰۰$$

۴۹ گزینه ۲

$$۷=\frac{ab}{a^۲+b^۲}\Rightarrow ۷(a^۲+b^۲)=ab\Rightarrow a^۲+b^۲=\frac{ab}{۷}$$

$$(a+b)^۲=a^۲+b^۲+۲ab=\frac{ab}{۷}+۲ab=\frac{ab+۱۴ab}{۷}=\frac{۱۵ab}{۷}=\frac{۱۵}{۷}ab$$

۵۰ گزینه ۲

$$(x+y)^۲-(x-y)^۲=۴xy$$

باتوجه‌به اتحاد بالا، داریم:

$$\text{با فرض}: \begin{cases} x=۱۰۰۰۰ \\ y=۲ \end{cases} \Rightarrow (۱۰۰۰۰+۲)^۲-(۱۰۰۰۰-۲)^۲=۴\times ۱۰۰۰۰\times ۲$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰۲)^۲-(۹۹۹۸)^۲=۸۰۰۰۰$$

۵۱ گزینه ۲

$$x^۲+y^۲+x-y+xy+۱=۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲+۲y^۲+۲x-۲y+۲xy+۲=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x+۱+y^۲-۲y+۱+y^۲+۲xy+x^۲=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۱)^۲+(y+x)^۲=۰$$

همان‌طور که می‌دانیم، مربع هر عدد همواره نامنفی است. در عبارت بالا چون مجموع سه عدد نامنفی برابر با صفر است، می‌توان نتیجه گرفت که هریک از آن‌ها برابر با صفر هستند؛ پس:

$$(x+۱)^۲=(y-۱)^۲=(y+x)^۲=۰$$

۵۲ گزینه ۲

چون باید عبارت یک‌جمله‌ای باشد و عبارت x حذف شدنی نیست، یک‌جمله‌ای به‌صورت x است و عبارات دیگر باید حذف شود (اگر $a=b=۰$ باشد عبارات دیگر حذف می‌شوند) که درجهٔ عبارت x نسبت به x برابر با یک و درجهٔ این عبارت نسبت به y برابر با صفر است؛ پس درجهٔ یک‌جمله‌ای نسبت به x و y برابر با $۱=۱+۰$ است.

۵۳ گزینه ۱

$$۲x^۳ + x^۲ - ۱۸x - ۹ = (۲x^۳ - ۱۸x) + (x^۲ - ۹) = ۲x(x^۲ - ۹) + (x^۲ - ۹)$$
$$= (۲x + ۱)(x^۲ - ۹) = (۲x + ۱)(x - ۳)(x + ۳)$$

۵۴ گزینه ۳

$$x^۲ + ۵x - m = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۵x = m$$

$$x(x + ۳)(x + ۵)(x + ۲) = x(x + ۵)(x + ۳)(x + ۲) = (x^۲ + ۵x)(x + ۳)(x + ۲)$$

$$= (x^۲ + ۵x)(x^۲ + ۳x + ۲x + ۶) = (x^۲ + ۵x)(x^۲ + ۵x + ۶)$$

$$= m(m + ۶) = m^۲ + ۶m$$

۵۵ گزینه ۲

یک معادلهٔ درجه‌دوم دومجهولی داریم که برای حل آن فقط می‌توانیم آن را به دو مربع کامل تبدیل کنیم و هریک را مساوی صفر قرار دهیم:

$$a^۲ + b^۲ - ۲a - ۲b + ۲ = ۰ \Rightarrow (a^۲ - ۲a + ۱) + (b^۲ - ۲b + ۱) = ۰$$

$$(a - ۱)^۲ + (b - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۱ \\ b - ۱ = ۰ \Rightarrow b = ۱ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۲$$

۵۶ گزینه ۴

$$x^۲ - ۲x - ۳ = x^۲ + (-۳ + ۱)x + (-۳ \times ۱) = (x - ۳)(x + ۱)$$

۵۷ گزینه ۳

اگر a و b هر دو منفی یا هر دو مثبت باشند، ضرب آن‌ها هم مثبت خواهد بود. مثال نقض برای سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱ : $a = ۲, b = -۳ \Rightarrow a + b = -۱ < ۰$

گزینهٔ ۲ : $a = -۱ \, , \, b = ۲ \, , \, c = -۲ \Rightarrow \frac{ab}{c} = \frac{-۲}{-۲} = ۱ > ۰$

گزینهٔ ۴ : $a = +۲ \, , \, b = -۱ \Rightarrow a^۲b = -۴ < ۰$

۵۸ گزینه ۱

$$A=\sqrt{x+x^{-۱}}=\sqrt{x+\frac{۱}{x}}=\sqrt{۲-\sqrt{۳}+\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}}$$

$$A=\sqrt{\frac{(۲-\sqrt{۳})^{۲}+۱}{۲-\sqrt{۳}}}=\sqrt{\frac{۴+۳-۲\times۲\times\sqrt{۳}+۱}{۲-\sqrt{۳}}}=\sqrt{\frac{۸-۴\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}}$$

$$A=\sqrt{\frac{۴(۲-\sqrt{۳})}{۲-\sqrt{۳}}}=\sqrt{۴}=۲$$

۵۹ گزینه ۳

$$(a+b)^{۳}=(a+b)^{۲}(a+b)=(a^{۲}+b^{۲}+۲ab)(a+b)=a^{۳}+a^{۲}b+ab^{۲}+b^{۳}+۲a^{۲}b+۲ab^{۲}$$
$$=a^{۳}+b^{۳}+۳a^{۲}b+۳b^{۲}a=a^{۳}+b^{۳}+۳ab(a+b)\xrightarrow[a^{۳}+b^{۳}=۲۵]{(a+b)^{۳}=۴^{۳}=۶۴}۶۴=۲۵+۳ab(۴)$$
$$\Rightarrow ۳۹=۱۲ab\Rightarrow ab=\frac{۳۹}{۱۲}=\frac{۱۳}{۴}$$

۶۰ گزینه ۴

نکته (اتحاد مزدوج): $(a-b)(a+b)=a^{۲}-b^{۲}$

$$(z+۷)^{۴}-(y-۳)^{۲}=((z+۷)^{۲}-۳+y)((z+۷)^{۲}+۳-y)$$
$$=(z^{۲}+۱۴z+۴۹-۳+y)(z^{۲}+۱۴z+۴۹+۳-y)$$
$$=(z^{۲}+۱۴z+y+۴۶)(z^{۲}+۱۴z-y+۵۲)$$