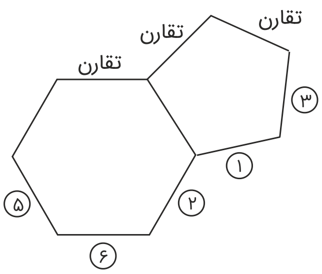
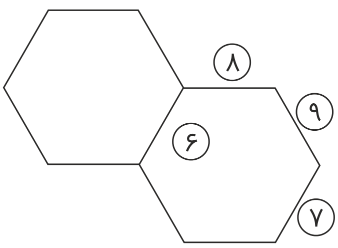
۱

گزینه ۳

حالت‌های مختلف را با توجه به این‌که در تقارن یا دوران روی‌هم نیافتند در نظر می‌گیریم:



در حالت‌های نشان‌داده‌شده ۵ حالت وجود دارد (برای چسباندن شش ضلعی منتظم دوم) پنج ضلعی می‌تواند در داخل شش ضلعی نیز قرار بگیرد. محل آن را نیز شماره‌گذاری می‌کنیم.



۲

گزینه ۲

ABCD چهار ضلعی : $\text{A} = ۳۶۰ - (۵۵ + ۲۰ + ۴۰) = ۲۴۵$

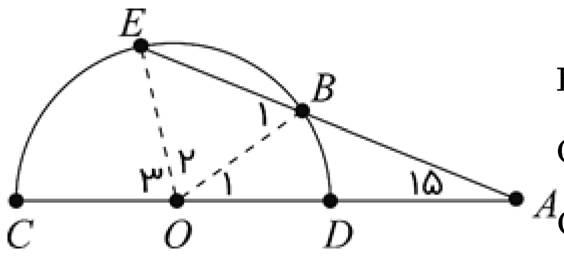
$\text{x} = ۳۶۰ - ۲۴۵ = ۱۱۵$

۳ — گزینه ۳

از O به B وصل می‌کنیم:

$$AB = OB \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۱۵^\circ$$

از O به E وصل می‌کنیم:



$$\hat{B}_۱ = \hat{O}_۱ + \hat{A} = ۳۰^\circ$$

$$OB = OE \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{E}_۱ = ۳۰^\circ$$

$$\hat{O}_۳ = \hat{E}_۱ + \hat{A} = ۳۰^\circ + ۱۵^\circ = ۴۵^\circ \Rightarrow CE = ۴۵^\circ$$

۴ — گزینه ۳

باید ۳۶۰° بر زاویهٔ بین دو محور تقارن بخش‌پذیر باشد. در بین گزینه‌ها فقط عدد $(\frac{۱}{۵})^\circ$ وجود دارد که ۳۶۰° بر آن بخش‌پذیر است.

۵ — گزینه ۳

$$DE = ۱۲\,,\ DM = ۳ \Rightarrow ME = ۹$$

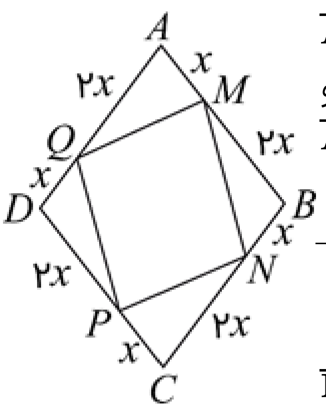
در دایره از برخورد دو وتر داریم:

$$DM \times ME = MF \times MC$$

$$۳ \times ۹ = ۴ \times x \Rightarrow \frac{۲۷}{۴} = x \Rightarrow x = ۶/۷۵$$

۶ — گزینه ۳

با رسم شکل و باتوجه‌به برابری اضلاع لوزی خواهیم داشت:



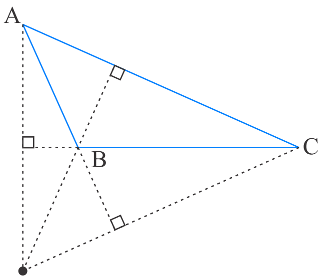
$$\left.\begin{array}{l} \overline{AM} = \overline{PC} = x \\ \text{زاویه‌های روبه‌رو} : \hat{A} = \hat{C} \\ \overline{AQ} = \overline{CN} = ۲x \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\Delta}{AMQ} \cong \overset{\Delta}{CPN} \Rightarrow \overline{MQ} = \overline{PN}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که: $\overline{MN} = \overline{PQ}$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{MQ} = \overline{PN} \\ \overline{MN} = \overline{PQ} \end{array}\right\} \Rightarrow MNPQ \text{ متوازی‌الاضلاع است}$$

۷ گزینه ۱

در شکل زیر محل برخورد ارتفاع‌ها خارج مثلث است.



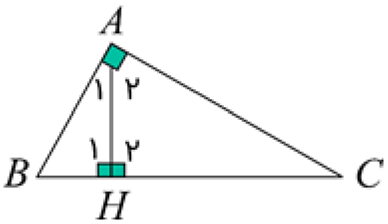
۸ گزینه ۴

$$\frac{۳}{۸} = \frac{۲۴}{x} \Rightarrow x = ۶۴$$

$$\text{محیط مثلث} = ۳ \times ۶۴ = ۱۹۲$$

۹ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC} : \hat{A} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ \\ \overset{\Delta}{ABH} : \hat{H}_۱ = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{A}_۱ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_۱$$

$$\overset{\Delta}{AHC} : \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{C} + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ \qquad \hat{B} = \hat{A}_۲$$

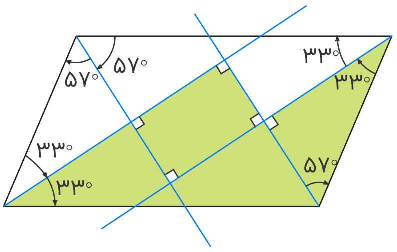
$$\xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{AH}} \Rightarrow \overline{BH}.\overline{HC} = \overline{AH}^۲ = ۱۵$$

$$\Rightarrow \overline{AH} = \sqrt{۱۵}$$

۱۰ گزینه ۱

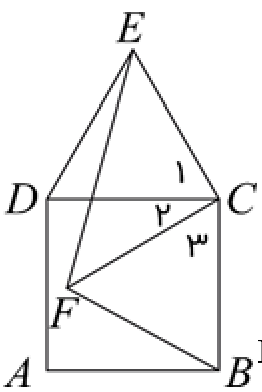
$$\frac{x}{۸} = \frac{۱۴}{۷} \Rightarrow x = \frac{۸ \times ۱۴}{۷} = ۱۶$$

۱۱ گزینه ۴



مجموعهٔ دو زاویهٔ داخلی مجاور در متوازی‌الاضلاع برابر ۱۸۰ درجه است و اگر هر دو زاویه نصف شود، مجموع نصف‌های آن‌ها برابر ۹۰ درجه می‌شود. همچنین می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است، درنتیجه زاویهٔ سوم در مثلث مشخص‌شدهٔ شکل بالا برابر ۹۰ می‌باشد و چون با زاویهٔ چهار ضلعی داخلی متقابل به رأس است، زاویهٔ چهار ضلعی داخلی نیز ۹۰ درجه خواهد شد. به همین ترتیب برای مثلث پایینی هم زاویهٔ ۹۰ درجه ایجاد می‌شود. پس هر ۴ زاویهٔ چهار ضلعی قائمه‌اند، درنتیجه شکل حاصل مستطیل است.

۱۲ گزینه ۱



$$\left.\begin{array}{l} FC = BC \\ EC = DC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{چون } BC=DC} FC = EC$$

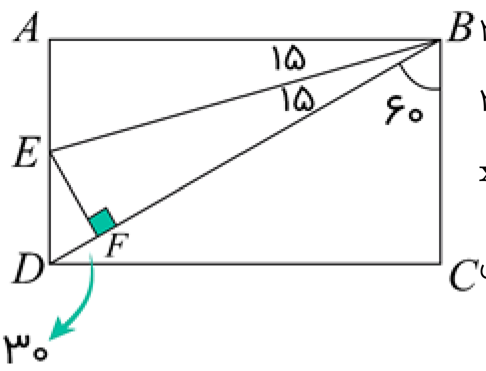
$$\left.\begin{array}{l} \hat{C}_۳ = ۶۰ \Rightarrow \hat{C}_۲ = ۹۰ - ۶۰ = ۳۰ \\ \hat{C}_۱ = ۶۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۹۰$$

پس مثلث FEC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است که طول هر ساق آن برابر با ۱ (ضلع مربع) است:

$$FE^۲ = EC^۲ + FC^۲ = ۲ \Rightarrow FE = \sqrt{۲}$$

۱۳ گزینه ۴

در مثلث $B\overset{\Delta}{C}D$ داریم:



$$۲x + x = ۹۰$$

$$۳x = ۹۰$$

$$x = ۳۰$$

ازطرفی دو مثلث $A\overset{\Delta}{B}E$ و $B\overset{\Delta}{E}F$ به حالت وتر و یک ضلع باهم همنهشت‌اند؛ پس BE نیمساز زاویهٔ $\hat{B}$ است؛ پس:

$$B_۱ = B_۲ = \frac{۹۰ - ۶۰}{۲} = ۱۵$$

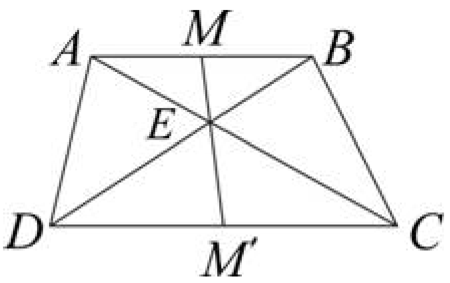
حالا زاویهٔ $E\hat{B}C$ برابر است با: $۱۵ + ۶۰ = ۷۵$

۱۴ گزینه ۴

اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی برای هر رأس در یک nضلعی منتظم از رابطهٔ $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n} = ۱۰۸^\circ$ و اندازهٔ زاویهٔ خارجی از رابطهٔ $۱۸۰^\circ - \frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}$ محاسبه می‌شود. خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} \text{اندازهٔ زاویهٔ داخلی هر رأس در پنج ضلعی منتظم } \alpha = \frac{۳ \times ۱۸۰^\circ}{۵} = ۱۰۸^\circ \\ \text{اندازهٔ زاویهٔ خارجی هر رأس در هشت ضلعی منتظم } \beta = ۱۸۰^\circ - \frac{۶ \times ۱۸۰^\circ}{۸} = ۴۵^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{۱۰۸^\circ}{۴۵^\circ} = \frac{۱۲}{۵}$$

۱۵ گزینه ۳

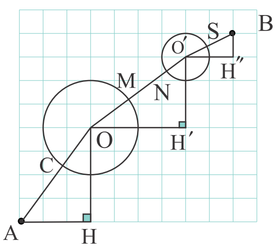


دو مثلث ABE و CDE متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{۶}{۹}$ است. دو پاره‌خط $\overline{EM}$ و $\overline{EM'}$ میانه‌های این دو مثلث هستند، پس نسبت آن‌ها نیز $\frac{۶}{۹}$ خواهد بود. از طرفی $\overline{MM'} = ۱۲$، پس:

$$\begin{array}{rcc} \overline{EM} \Rightarrow & ۶ & ۴/۸ \\ \overline{EM'} \Rightarrow & ۹ & ۷/۲ \\ \hline \overline{MM'} \text{ جمع} \Rightarrow & ۱۵ & ۱۲ \end{array}$$

۱۶ گزینه ۱

مسیری که در شکل نمایش داده شده است، کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای رسیدن از A به B است. حال هرکدام از پاره‌خط‌هایی که در قسمت دایره نیستند را حساب می‌کنیم.



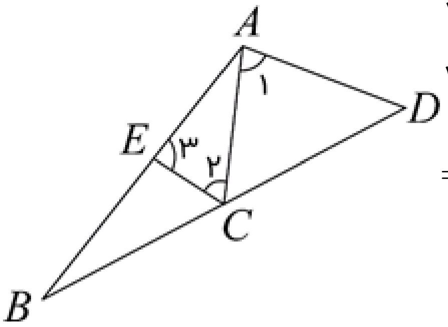
$$\left.\begin{array}{l} OA^۲ = AH^۲ + OH^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ \Rightarrow OA = ۵ \\ \text{شعاع دایره } OC = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{AC = ۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} OO'^۲ = OH'^۲ + O'H'^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۲۵ \Rightarrow OO' = ۵ \\ OM = ۲ \ , \ NO' = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{MN = ۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} O'B^۲ = O'H''^۲ + H''B^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۵ \Rightarrow O'B = \sqrt{۵} \\ O'S = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{SB = \sqrt{۵} - ۱}$$

$$\text{مسیر موردنظر } AC + MN + SB = ۳ + ۲ + \sqrt{۵} - ۱ = ۴ + \sqrt{۵}$$

۱۷ گزینه ۲



$$\left.\begin{array}{l}\hat{۱} = \hat{۲} \Rightarrow \mathrm{EC} \parallel \mathrm{AD} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BD}} \\ \hat{۲} = \hat{۳} \Rightarrow \mathrm{AC} = \mathrm{AE}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BD}} \Rightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}} = \frac{۱۸}{۱۰} = \frac{۹}{۵}$$

۱۸ گزینه ۴

عمودمنصف همواره از مرکز پاره‌خط و عمود بر آن رسم می‌شود.

۱۹ گزینه ۳

می‌دانیم در هر مثلث، مجموع زاویه‌های داخلی برابر با ۱۸۰° است؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{\mathrm{ABC}} : \hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{C}} = ۱۸۰^\circ \\ \text{طبق فرض} : \hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{C}}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\mathrm{A}} + ۲\hat{\mathrm{C}} = ۱۸۰^\circ \\ \mathrm{CHM} : \alpha + \hat{\mathrm{C}} + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \hat{\mathrm{C}} = ۹۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha + ۲\hat{\mathrm{C}} = ۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\mathrm{A}} = ۲\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{۲}$$

۲۰ گزینه ۴